מודלים חישוביים
תרגול מס' 10

4 בינואר 2017

נושאי התרגול:

- משפט Rice ועוד רדוקציות.
- שאלות סיכום

1 משפט Rice ועוד רדוקציות

נזכיר את משפט Rice:

משפט 1.1 תהא C תת קבוצה לא טריוויאלית של RE ותהא $L_C = \{\langle M\rangle \mid L(M) \in C\}$. אזי, $L_C \notin \mathrm{R}$.

מתי C היא תכונה (או, תת קבוצה) לא טריוויאלית? אם קיימות L_1 ו־ L_2 כך ש־ $L_1 \in C$ ו־ $L_2 \notin C$. התכונה גם צריכה להיות תכונה של <u>שפות</u>. כלומר, אם $L(M_1) = L(M_2)$ אז $M_1, M_2 \in C$ או $M_1, M_2 \notin C$. אם כך, עבור הדוגמאות הבאות, האם ניתן להשתמש במשפט רייס?

- עבור השפה $\{\langle M\rangle \mid L(M) \in \mathrm{RE}\}$? לא, כי התכונה טריוויאלית (וגם השפה ב־ R).
- עבור השפה $A_{TM,\epsilon} = \{\langle M\rangle \mid \epsilon \in L(M)\}$? כן, התכונה, כמובן, היא $C = \{L \in \mathrm{RE} \mid \epsilon \in L\}$. זוהי אינה תכונה טריוויאלית, שכן $\emptyset \notin C$ אך $\Sigma^\star \in C$.
- עבור השפה $\{\langle M\rangle \mid M \text{ halts on } 101\}$? לא, כי זו אינה תכונה של שפות.
- עבור השפה $\{\langle M\rangle \mid M \text{ accepts } 101\}$? כן, זוהי תכונה לא טריוויאלית של שפות.
- עבור השפה $\{\langle M\rangle \mid M \text{ always halts}\}$? לא, כי זו אינה תכונה של שפות.

תרגיל 1

הוכיחו כי $L_{\mathrm{R}} = \{\langle M\rangle \mid L(M) \in \mathrm{R}\} \notin \mathrm{R}$.

פתרון

נזכור כי

$$H_{TM} = \{\langle M\rangle, w \mid M \text{ is a TM that halts on } w\} \in \mathrm{RE}\backslash\mathrm{R}$$

אם כך, נגדיר את התכונה $C = \{L \mid L \in \mathrm{R}\}$. C אינה טריוויאלית, כי $H_{TM} \notin C$ ו־ $\Sigma^\star \in C$. לכן, לפי משפט רייס:

$$L_C = \{\langle M\rangle \mid L(M) \in C\} = L_{\mathrm{R}} \notin \mathrm{R}$$

תרגיל 2

הוכיחו כי $L_{\mathrm{R}} \notin \mathrm{coRE}$.

פתרון

תהא M_ε שעל קלט $\langle M\rangle$ מסמלצת את M על ε ומקבלת אס"ם M קיבלה. נראה כי $H_{TM} \leq_m L_{\mathrm{R}}$. נרצה למצוא פונקציה חשיבה $f(\langle M\rangle, w) = M'$ כך ש־ M עוצרת על w אס"ם $L(M') \in \mathrm{R}$. M' על קלט x:

1. מריצה את M על w למשך $|x|$ צעדים.
2. אם M עצרה אז M' דוחה.
3. אם M לא עצרה, הרץ את M_ε על x ואם M_ε עצרה, M' תענה כמוהה.

נכונות:

- f חשיבה.
- אם $\langle M\rangle$ עוצרת על w אזי קיים k כך ש־ $\langle M\rangle$ עוצרת על w תוך k צעדים. אזי, לכל x כך ש־ $k \geq |x|$, M' דוחה את x. מכאן, ש־ $L(M')$ סופית ו־ $L(M') \in \mathrm{R}$.
- אם $\langle M\rangle$ לא עוצרת על w אז $L(M') = L(M_\varepsilon)$. מכיוון שידוע ש־ $L(M_\varepsilon) \notin \mathrm{R}$, הרי ש־ $L(M') \notin \mathrm{R}$.

תרגיל 3 (מועד א' 2013)

נתונה השפה הבאה $L = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is a TM and } \exists n > 0. \forall w \in \Sigma^n \ M \text{ accepts } w\}$.

1. הראו ש L ב RE
2. הראו רדוקציית מיפוי מבעיית העצירה לשפה L

פתרון

1. נבנה מ"ט M' המקבלת את L

נסיון ראשון בהינתן קלט $\langle M\rangle$, M' מבצעת:

- בודקת האם $\langle M\rangle$ הוא קידוק חוקי של מ"ט. אם לא דוחה.
- לכל $n \geq 1$
  - הרץ את M על כל המילים באורך n
  - אם M קיבלה את כולם, M' מקבלת.

בעיה: M עלולה לא לעצור על אחד הקלטים.

נסיון שני בהינתן קלט $\langle M\rangle$, M' מבצעת:

- בודקת האם $\langle M\rangle$ הוא קידוק חוקי של מ"ט. אם לא דוחה.
- לכל $k \geq 1$
  - לכל $1 \leq j \leq k$:
  - הרץ את M על כל המילים באורך j למשך k צעדים. אם M קיבלה את כל המילים באורך j, M' מקבלת.

נכונות:

- אם $\langle M\rangle \in L$ אז קיים n כך שלכל $w \in \Sigma^n$ M מקבלת את w. נסמן ב r את מספר הצעדים המקסימאלי ש M מבצעת על $w \in \Sigma^n$. כשנגיע בחישוב ל $k = \max(r, n)$ M' תעצור ותקבל.
- אם $\langle M\rangle \notin L$ אז או ש $\langle M\rangle$ אינו קידוד חוקי, ואז M' דוחה, או שלכל n קיים $w \in \Sigma^n$ כך ש M לא מקבלת את w. לכן M' לעולם לא תקבל.

פתרונות נוספים:

- שימוש במכונה לא דטרמיניסית:
  בהינתן קלט $\langle M \rangle$, M' מבצעת:
  - בודקת האם $\langle M \rangle$ הוא קידוד חוקי של מ"ט. אם לא דוחה.
  - מנחשת את n
  - מריצה את M על כל המילים באורך n
  - אם M קיבלה את כולם, M' מקבלת.

  נכונות:
  - אם $\langle M \rangle \in L$ אז קיים n כך שלכל $w \in \Sigma^n$ M מקבלת את w לכן קיים חישוב בו M' מנחשת את n ומקבלת.
  - אם $\langle M \rangle \notin L$ אז או ש $\langle M \rangle$ אינו קידוד חוקי, ואז M' דוחה, או שלא קיים n כך שלכל $w \in \Sigma^n$ M מקבלת את w. לכן לכל n ש M' תנחש קיימת $w \in \Sigma^n$ כך ש M לא מקבלת את w, ולכן M' לעולם לא תקבל.
- שימוש באנומרטור:
  - מריצים את האנומרטור של $L(M)$ (למה קיים אנומרטור כזה?)
  - בכל פעם שיש בפלט מילה חדשה w בודקים אם כל המילים באורך של w כבר בפלט. אם כן עוצרים ומקבלים.

2. נראה $H_{TM} \leq_m L$

בהינתן קלט $\langle M, w \rangle$, אם הקלט אינו קידוד חוקי של מכונה ומילה, פונקציית הרדוקציה f תחזיר ε אחרת, היא בונה את המ"ט M' הבאה:

בהינתן קלט x, M' מבצעת:

- מריצה את M על w
- מקבלת

נכונות:

- f חשיבה.
- אם M עוצרת על w אז לכל קלט x M' מקבלת, כלומר $L(M') = \Sigma^*$. לכן לכל n, M' מקבלת את כל המילים ב Σ^n, ולכן $\langle M' \rangle \in L$.
- אם M לא עוצרת על w אז לכל קלט x M' לא מקבלת, כלומר $L(M') = \emptyset$. לכן לכל n, M' לא מקבלת את כל המילים ב Σ^n, ולכן $\langle M' \rangle \notin L$.

תרגיל 4

נזכור כי עבור שפה L, $Reverse\,(L) = \left\{ w^R \mid w \in L \right\}$. הוכיחו כי $\mathrm{RE} \backslash \mathrm{R}$ סגורה תחת $Reverse$.

פתרון

תהא $L \in \mathrm{RE} \backslash \mathrm{R}$. נראה:

1. $L^R \in \mathrm{RE}$. ידוע כי $L \in \mathrm{RE}$ ולכן קיימת מ"ט M המקבלת את L. נגדיר מ"ט M^R שעל קלט x מריצה את M על x^R ועונה כמוהה. ברור כי אם $x \in L^R$ אזי $x^R \in L$ ו- M (ולכן M^R) תקבל. אם $x \notin L^R$ אזי $x^R \notin L$ ו- M (ולכן M^R) תדחה או לא תעצור.
2. $L^R \notin \mathrm{R}$. נראה כי $L \leq_m L^R$. הרדוקציה f: $f\,(w) = w^R$. אזי, $w \in L$ אם"ם $f\,(w) = w^R \in L^R$.