מודלים חישוביים
תרגול מס' 13

24 בינואר 2017

נושאי התרגול:

- המחלקה NPC - המשך.

1 המחלקה NPC - המשך

נזכיר:

הגדרה 1.1 שפה $L \in \mathcal{NPC}$ (L היא $\mathcal{NP}$־שלמה) אם:

1. $L \in \mathcal{NP}$.
2. L היא $\mathcal{NP}$־קשה: לכל $A \in \mathcal{NP}$ מתקיים ש־ $A \leq_p \mathcal{NP}$.

תרגיל 1

הוכיחו כי:

$$\text{IS} \vee \text{CLIQUE} = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ has an IS or a clique of size } k\} \in \mathcal{NPC}$$

פתרון

נראה כי $\text{IS} \vee \text{CLIQUE} \in \mathcal{NP}$ ושהיא $\mathcal{NP}$־קשה.

- קל לראות כי $\text{IS} \vee \text{CLIQUE} \in \mathcal{NP}$ - בדקו בעצמכם.
- כעת, כדי להראות שהיא קשה, נראה $\text{IS} \leq_p \text{IS} \vee \text{CLIQUE}$. הרדוקציה תהיה $f(\langle G, k\rangle) = \langle G', k'\rangle$ כך שעבור $G = (V, E)$, G' יהיה G בתוספת $|V|$ צמתים מבודדים, ו־ $k' = k + |V|$. ואז:
  - ברור כי f פולינומית.
  - אם ל־ G יש קבוצה ב"ת בגודל k אז ל־ G' יש קבוצה ב"ת בגודל $k + |V|$ ולכן $\langle G', k'\rangle \in \text{IS} \vee \text{CLIQUE}$.
  - אם ל־ G אין קבוצה ב"ת בגודל k אז גם ל־ G' אין קבוצה ב"ת בגודל $k + |V|$ וגם אין קליק בגודל $k + |V|$ (כי הצמתים מבודדים). לכן, $\langle G', k'\rangle \notin \text{IS} \vee \text{CLIQUE}$.

תרגיל 2

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, כיסוי קודקודים (Vertex Cover) בגרף היא קבוצה $U \subseteq V$ כך שלכל $(u, v) \in E$ מתקיים כי $u \in V$ או $v \in V$, כלומר, קבוצת קודקודים, כך שכל קשת בגרף נוגעת לפחות באחד מקודקודים אלו. הוכיחו כי:

$$\text{VC} = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ is an undirected graph with a vertex cover of size } k\} \in \mathcal{NPC}$$

פתרון

הוכיחו לבד כי $\mathrm{VC} \in \mathcal{NP}$.
נראה רדוקציה $\mathrm{IS} \leq_p \mathrm{VC}$. נגדיר את פונק' הרדוקציה $f(\langle G=(V,E),k\rangle) = \langle G, |V|-k\rangle$ נכונות:

- ברור כי הרדוקציה פולינומית.
- אם $\langle G=(V,E),k\rangle \in \mathrm{IS}$, תהא $S \subseteq V$ קבוצה ב"ת בגודל k ב G, כלומר לכל $u,v \in S$ מתקיים כי $(u,v) \notin E$. נסמן $\bar{S} = V \setminus S$. מתקיים $|\bar{S}| = |V|-k$, וכמו כן, כיוון ש S ב"ת לכל $(u,v) \in E$ $u \notin S$ או $v \notin S$ ולכן בהכרח $u \in \bar{S}$ או $v \in \bar{S}$ (או שניהם) ולכן $\bar{S}$ הוא כיסוי בקודקודים בגודל k ו־ $\langle G, |V|-k\rangle \in \mathrm{VC}$.
- אם $\langle G, |V|-k\rangle \in \mathrm{VC}$, תהא $U \subseteq V$ כיסוי בקודקודים בגודל k ב G. לכל $(u,v) \in E$ בהכרח $u \in U$ או $v \in U$ (או שניהם). $\bar{U}$ היא קבוצה ב"ת בגודל k ב G וכמו כן $|\bar{U}| = |V|-|U| = |V|-(|V|-k) = k$ ולכן ב G יש קבוצה ב"ת בגודל k, כלומר $\langle G=(V,E),k\rangle \in \mathrm{IS}$.

תרגיל 3

נזכיר כי $\mathrm{SubsetSum} = \left\{\langle x_1,\ldots,x_k,t\rangle \mid \exists I \subseteq \{1,\ldots,k\} . \sum_{i\in I} x_i = t\right\}$. הוכיחו כי:

$$\mathrm{Partition} = \left\{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \mid \exists S \subseteq \{1,\ldots,n\} . \sum_{i\in S} x_i = \sum_{i\notin S} x_i\right\} \in \mathcal{NPC}$$

פתרון

נראה כי $\mathrm{Partition} \in \mathcal{NP}$ ושהיא $\mathcal{NP}$־קשה.

- קל לראות כי $\mathrm{Partition} \in \mathcal{NP}$ - בדקו בעצמכם.
- כעת, כדי להראות שהיא קשה, נראה $\mathrm{SubsetSum} \leq_p \mathrm{Partition}$. הרדוקציה תהיה $f(\langle x_1,\ldots,x_n,t\rangle) = \langle x_1,\ldots,x_n,a,b\rangle$ כך שאם נסמן $k = \sum_{i=1}^n x_i$, אז $a = t+k$ ו־ $b = 2k-t$. ואז:
  - ברור כי f פולינומית.
  - אם $\langle x_1,\ldots,x_n,t\rangle \in \mathrm{SubsetSum}$ אז קיימת $I \subseteq \{1,\ldots,n\}$ כך ש־ $\sum_{i\in I} x_i = t$. נגדיר

$$S = \{x_i \mid i \in I\} \cup \{b\}$$

ואז:

$$\begin{aligned}\sum_{y\in S} y &= \sum_{i\in I} x_i + 2k - t = t + 2k - t = 2k \\ \sum_{y\notin S} y &= \sum_{i\notin I} x_i + a = k - t + t + k = 2k\end{aligned}$$

ולכן $\langle x_1,\ldots,x_n,a,b\rangle \in \mathrm{Partition}$.

  - אם $\langle x_1,\ldots,x_n,a,b\rangle \in \mathrm{Partition}$, קיימת חלוקה מאוזנת I של

$$\left\langle x_1,\ldots,x_n, t + \sum_{i=1}^n x_i, 2\sum_{i=1}^n x_i - t\right\rangle$$

ברור כי $t + \sum_{i=1}^n x_i$ ו־ $2\sum_{i=1}^n x_i - t$ לא יכולים להיות באותו צד של החלוקה. אם כך:

$$\sum_{i\in I} x_i + 2\sum_{i=1}^n x_i - t = \sum_{i\notin I} x_i + t + \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i - t &= \sum_{i\notin I} x_i + t \\
\sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\notin I} x_i - t &= \sum_{i\notin I} x_i + t \\
2\sum_{i\in I} x_i &= 2t \\
\sum_{i\in I} x_i &= t
\end{aligned}$$

ולכן $\langle x_1, \ldots, x_n, t\rangle \in \mathrm{SubsetSum}$.

תרגיל 4

הוכיחו כי:

$$\mathrm{XS} = \left\{ x_1, \ldots, x_n \mid \exists S \subseteq \{1, \ldots, n\} . \sum_{i\in S} x_i + \left|\bar{S}\right| = \sum_{i\notin S} x_i + |S| \right\} \in \mathcal{NPC}$$

פתרון

נראה כי $XS \in \mathcal{NP}$ ושהיא $\mathcal{NP}$-קשה.

- קל לראות כי $\mathrm{XS} \in \mathcal{NP}$ - בדקו בעצמכם.
- כעת, כדי להראות שהיא קשה, נראה $\mathrm{XS} \leq_p \mathrm{Partition}$. הרדוקציה תהיה $f(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle) = \langle x_1 + 1, \ldots, x_n + 1\rangle$. ואז:
  - ברור כי f פולינומית.
  - מתקיים:

$$\begin{aligned}
\langle x_1 + 1, \ldots, x_n + 1\rangle \in \mathrm{XS} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists S. \sum_{i\in S} (x_i + 1) + \left|\bar{S}\right| = \sum_{i\notin S} (x_i + 1) + |S| \\
&\Leftrightarrow \quad \exists S. \sum_{i\in S} (x_i + 1) - |S| = \sum_{i\notin S} (x_i + 1) - \left|\bar{S}\right| \\
&\Leftrightarrow \quad \exists S. \sum_{i\in S} (x_i + 1 - 1) = \sum_{i\notin S} (x_i + 1 - 1) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists S. \sum_{i\in S} x_i = \sum_{i\notin S} x_i \\
&\Leftrightarrow \quad \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in \mathrm{Partition}
\end{aligned}$$

ולכן הנכונות מתקיימת.