מודלים חישוביים
תרגול מס' 3

16 בנובמבר 2016

נושאי התרגול:

- למת הניפוח לשפות רגולריות.
- משפט מיהיל־נרוד.

1 למת הניפוח לשפות רגולריות

נזכר בלמת הניפוח, שתהווה עבורנו טכניקה להוכחת אי־רגולריות:

למה 1.1 לכל שפה רגולרית L קיים $\ell > 0$ כך שלכל $s \in L$ המקיימת $|s| \geq \ell$ קיים פירוק מהצורה $s = xyz$ כך ש:

1. לכל $i \geq 0$, $xy^iz \in L$.
2. $|y| > 0$.
3. $|xy| \leq \ell$.

איך נשתמש בלמת הניפוח כדי להוכיח ששפה L כלשהי היא אי־רגולריות? נניח בשלילה ש־ L רגולרית ויהא ℓ המובטח לנו. נבחר מילה $s \in L$ באורך גדול מ־ ℓ ונראה ש<u>לכל</u> חלוקה xyz של s כך ש־ $|y| > 0$ ו־ $|xy| \leq \ell$ קיים $i \geq 0$ כך ש־ $xy^iz \notin L$, בסתירה ללמת הניפוח.

תרגיל 1

הוכח כי שפת הפלינדרומים מעל $\Sigma = \{0,1\}$, שנסמנה ב־ L_1, אינה רגולרית.

פתרון

נניח בשלילה ש־ L_1 רגולרית ויהא ℓ קבוע הניפוח המובטח לנו. נבחר

$$s = 0^\ell 1 0^\ell \in L_1$$

ונשים לב שאכן $|s| \geq \ell$. כעת נשים לב שכל חלוקה של s ל־ xyz כך ש־ $|xy| \leq \ell$ ו־ $|y| > 0$ מקיימת ש־ y מורכבת כולה מאפסים. לכן, $xy^2z \notin L_1$, בסתירה.

תרגיל 2

הוכח כי $L_2 = \left\{0^{n^2} \mid n \geq 0\right\}$ מעל $\Sigma = \{0\}$ אינה רגולרית.

פתרון

נניח בשלילה ש־ L_2 רגולרית ויהא ℓ קבוע הניפוח המובטח לנו. נבחר

$$s = 0^{\ell^2} \in L_2$$

ונשים לב שאכן $|s| \geq \ell$. נקח חלוקה של s ל־ xyz כך ש־ $|xy| \leq \ell$ ו־ $|y| > 0$. נסמן $|y| = k \leq \ell$ ונסתכל על

$$w = xy^2z = 0^{\ell^2+k}$$

נניח בשלילה ש־ $w \in L_2$. אזי, קיים n כך ש־ $\ell^2 + k = n^2$. אזי:

$$\ell^2 < \ell^2 + k \leq \ell^2 + \ell = \ell(\ell+1) < (\ell+1)^2$$

מכאן קיבלנו ש־ $\ell^2 < n^2 < (\ell+1)^2$, כלומר שקיים n המקיים $\ell < n < \ell + 1$, בסתירה. אזי, L_2 אינה רגולרית.

2 משפט מיהיל־נרוד

נזכר כי עבור שפה L מעל הא"ב Σ, היחס $\sim_L$ מעל מילים ב־ $\Sigma^\star$ מוגדר כך: $x \sim_L y$ אם לכל $z \in \Sigma^\star$ מתקיים ש־ $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$. זהו יחס שקילות ולכן מחלק את $\Sigma^\star$ למחלקות שקילות. משפט מיהיל־נרוד יהווה עבורנו כלי נוסף להוכחת אי־רגולריות:

משפט 2.1 $L \subseteq \Sigma^\star$ רגולרית אס"ם קבוצת המנה $\Sigma^\star/_{\sim_L}$ סופית.

דוגמא 1

עבור השפה $L_3 = L(ba^\star b^\star)$, לכל זוג מילים מהזוגות הבאים, האם הם באותה מחלקת שקילות?

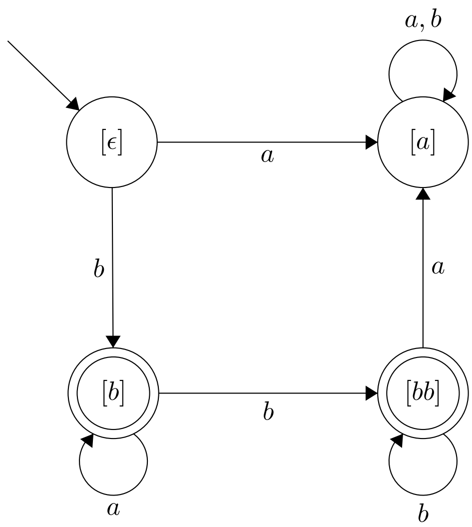
- aa ו־ ab? כן. שתי המילים אינן בשפה וגם אינן רישא של אף מילה בשפה.
- ba ו־ baa? כן. כל המשך חוקי של ba יהיה המשך חוקי של baa ולהיפך.
- baa ו־ bab? לא. עבור $z = a$, $baaa \in L_3$ אך $baba \notin L_3$.
- a ו־ ϵ? לא. עבור $z = ba$, $aba \notin L_3$ אך $ba \in L_3$.

עבור אותה שפה, מהן מחלקות השקילות?

1. $[\varepsilon]_{\sim_{L_3}}$.
2. $[a]_{\sim_{L_3}}$.
3. $[b]_{\sim_{L_3}}$.
4. $[bb]_{\sim_{L_3}}$.

ואכן ציפינו למספר סופי של מחלקות שקילות. כיצד ניתן להשתמש בכך כדי לבנות אוטומט המקבל את L_3?

- המצבים יהיו מחלקות השקילות.
- המצב ההתחלתי יהיה מחלקת השקילות המכילה את ε.
- המצבים המקבלים יהיו מחלקות שקילות המוכלות ב־ L_3.



תרגיל 3

עבור השפה L_4 שמכילה את כל המילים באורך 2 לפחות שהספרה הלפני אחרונה היא 0, מצא את מחלקות השקילות.

פתרון

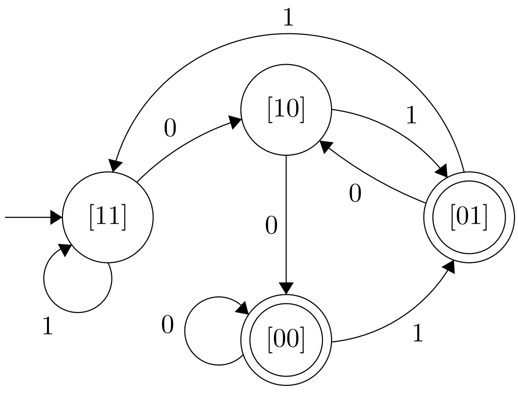
ראשית נשים לב שלכל $x, y \in \Sigma^*$ ולכל $z \in \Sigma^*$ כך ש $|z| \geq 2$ מתקיים $yz \in L_4 \iff xz \in L_4$. נבדוק עבור $|z| < 2$, לכל $w \in \Sigma^*$ האם $wz \in L_4$

$w \backslash z$	ε	0	1
ε	x	x	x
0	x	v	v
1	x	x	x
$(0 \cup 1)^*00$	v	v	v
$(0 \cup 1)^*01$	v	x	x
$(0 \cup 1)^*10$	x	v	v
$(0 \cup 1)^*11$	x	x	x

לכן מחלקות השקילות הן

1. $[00] = (0 \cup 1)^*00$
2. $[01] = (0 \cup 1)^*01$
3. $[10] = (0 \cup 1)^*10 \cup \{0\}$
4. $[11] = (0 \cup 1)^*11 \cup \{\varepsilon, 1\}$

נבנה אוטומט ע"י שימוש במחלקות השקילות.



תרגיל 4

הוכיחו כי השפה $L_5 = \left\{ w \in \{0,1\}^\star \mid \#_0(w) = \#_1(w) \right\}$ אינה רגולרית.

פתרון

בהרצאה הוכחנו טענה זו לפי למת הניפוח. כעת נראה שתי דרכים שונות. תחילה, בעזרת משפט מיהיל־נרוד. לכל $i \geq 1$ נסמן $x_i = 0^i$ ו־ $y_i = 0^{2i}$. נבחר $z_i = 1^i$. אזי, $x_i z_i \in L_5$ אך $y_i z_i \notin L_5$. אם כך, ליחס $\sim_{L_5}$ יש אינסוף מחלקות שקילות, ולפי משפט מיהיל־נרוד L_5 אינה רגולרית. שימו לב כי מחלקות השקילות הן מהצורה הבאה, עבור $k \in \mathbb{Z}$:

$$C_k = \left\{ w \in \{0,1\}^\star \mid \#_a(w) - \#_b(w) = k \right\}$$

הוכיחו זאת.

כעת, נוכיח כי L_5 אינה רגולרית בעזרת תכונות סגור. נניח בשלילה כי L_5 רגולרית ונשים לב כי

$$L_5 \cap L(0^\star 1^\star) = \left\{ 0^i 1^i \mid i \geq 0 \right\}$$

מכיוון שגם L_5 וגם $L(0^\star 1^\star)$ רגולריות (מכיוון שהיא מוגדרת ע"י ביטוי רגולרי), החיתוך שלהן הוא רגולרי. אך השפה $\left\{ 0^i 1^i \mid i \geq 0 \right\}$ אינה רגולרית, בסתירה. לכן, L_5 אינה רגולרית.