מודלים חישוביים
תרגול מס' 4

23 בנובמבר 2016

נושאי התרגול:

- שפות רגולריות - תכונות סגור נוספות ושאלות סיכום.

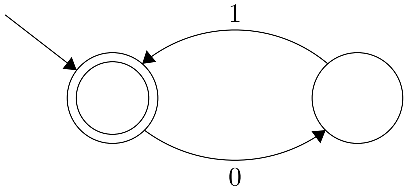
1 שפות רגולריות - תכונות סגור נוספות ושאלות סיכום

בנוסף למשלים, חיתוך, איחוד, שרשור, חזקה וסגור קליני, בהרצאה ראינו כי השפות הרגולריות סגורות גם ל־

- חלוקה מימין - עבור $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^\star$, נגדיר $L_1/L_2 = \{x \in \Sigma^\star \mid \exists y \in L_2 . xy \in L_1\}$. לכל L_1 רגולרית ו־ L_2 שפה כלשהי (לא בהכרח רגולרית), L_1/L_2 רגולרית.
- הומומורפיזם - עבור א"ב Δ ו־ Σ, הומומורפיזם הוא פונקציה $h : \Delta \to \Sigma^\star$. עבור $w \in \Delta^\star$, $h(w) = h(w_1) \cdots h(w_n)$ ועבור $L \subseteq \Delta^\star$, $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$. השפות הרגולריות סגורות תחת הומומורפיזם.
- הומומורפיזם הפוך - עבור הומומורפיזם $h : \Delta \to \Sigma^\star$ נגדיר $h^{-1} : \Sigma^\star \to \mathcal{P}(\Delta^\star)$ ע"י: $h^{-1}(w) = \{x \in \Delta^\star \mid h(x) = w\}$. עבור $L \subseteq \Sigma^\star$, $h^{-1}(L) = \bigcup_{x \in L} h^{-1}(x)$. השפות הרגולריות סגורות תחת הומומורפיזם הפוך.

תרגיל 1

תהא L_1 השפה של ה־ NFA הבא:



ויהי h הומומורפיזם המוגדר ע"י $h(0) = 101$ ו־ $h(1) = 01$. כתבו ביטוי רגולרי קצר ככל האפשר עבור L_1, $h(L_1)$ ו־ $h^{-1}(L_1)$.

פתרון

1. $L_1 = L\left((01)^\star\right)$.
2. $h(L_1) = L\left((10101)^\star\right)$.
3. $h^{-1}(L_1) = L(1^\star)$.

תרגיל 2

הוכיחו כי השפה

$$L_2 = \{w \in \Sigma^\star \mid \#_a(w) + \#_b(w) = \#_c(w)\}$$

מעל $\Sigma = \{a, b, c\}$ אינה רגולרית.

פתרון

תהא $\Delta=\{0,1\}$ ונגדיר הומומורפיזם $h:\Sigma\to\Delta^\star$ כך:

$$\begin{aligned}h(a)&=&0\\h(b)&=&0\\h(c)&=&1\end{aligned}$$

ואז:

$$h(L_2)=\{w\in\Delta^\star\mid\#_0(w)=\#_1(w)\}$$

נסמן:

$$L'=h(L_2)\cap L(0^\star1^\star)=\left\{0^i1^i\mid i\geq0\right\}$$

נקבל כי L' רגולרית, בסתירה למה שהוכחנו בכיתה. מכאן, ש־ L_2 אינה רגולרית.

תרגיל 3

הוכיחו כי השפה

$$L_3=\left\{0^m1^{3m}\mid m\geq0\right\}$$

מעל $\Sigma=\{0,1\}$ אינה רגולרית.

פתרון

נניח בשלילה ש L רגולרית. תהא $\Delta=\{\mathrm{a},b\}$ ונגדיר הומומורפיזם $h:\Sigma\to\Delta^\star$ כך:

$$\begin{aligned}h(a)&=&0\\h(b)&=&111\end{aligned}$$

נסמן $L'=h^{-1}(L)=\{a^mb^m\mid m\geq0\}$. מסגירות שפות רגולריות להומומורפיזם הופכי L' רגולרית - סתירה.

תרגיל 4

תהא L שפה רגולרית מעל Σ. נגדיר:

$$Skip(L)=\{\sigma_1\sigma_3\cdots\sigma_{2n-1}\mid\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{2n}\in L,n\geq0\}$$

הוכח כי אם L רגולרית אזי $Skip(L)$ רגולרית.

פתרון

נגדיר $\Delta=\Sigma\cup\Sigma'$ כך ש־ $\Sigma'=\{\sigma'\mid\sigma\in\Sigma\}$. נגדיר הומומורפיזם $h:\Delta\to\Sigma^\star$ כך שלכל $\sigma\in\Sigma$, $h(\sigma)=\sigma$ ו־ $h(\sigma')=\sigma$. אם כך, $h^{-1}(L)$ נותן את כל האפשרויות ל"תיוג" מילים מ־ L. פורמלית:

$$h^{-1}(L)=\{\delta_1\cdots\delta_n\mid\forall1\leq i\leq n.\delta_i\in\{\sigma_i,\sigma_i'\}\wedge\sigma_1\cdots\sigma_n\in L\}$$

ונגדיר $L_1=h^{-1}(L)\cap(\Sigma\Sigma')^\star$. כלומר, ב־ L_1 יש מילים באורך זוגי כך שהתווים במקומות האי־זוגיים אינם מתויגים והתווים במקומות הזוגיים מתויגים. כעת, נגדיר הומומורפיזם נוסף, $g:\Delta\to\Sigma^\star$ כך שלכל $\sigma\in\Sigma$, $g(\sigma)=\sigma$ ו־ $g(\sigma')=\epsilon$. מתקיים ש־

$$g(L_1)=g\left(h^{-1}(L)\cap(\Sigma\Sigma')^\star\right)=Skip(L)$$

כל הפעולות שהשתמשנו משמרות רגולריות, ולכן $Skip(L)$ רגולרית.

תרגיל 5

תהא L_1 שפה רגולרית ו־ L_2 שפה כלשהי, מעל אותו א"ב Σ. הוכיחו כי החלוקה משמאל,

$$L_2 \backslash L_1 = \{y \in \Sigma^\star \mid \exists x \in L_2 . xy \in L_1\}$$

היא רגולרית.

פתרון

L_1 רגולרית ולכן קיים אס"ד $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ כך ש־ $L(M) = L_1$. נגדיר אוטומט א"ד $N = (Q, \Sigma, \delta', S, F)$ כך ש־ $L(N) = L_2 \backslash L_1$. האוטומט יוגדר כך:

- δ' תהיה למעשה זהה ל־ δ. כלומר, לכל $q \in Q$ ו־ $\sigma \in \Sigma$ מתקיים ש־ $\delta'(q, \sigma) = \{\delta(q, \sigma)\}$.
- $S = \left\{q \in Q \mid \exists x \in L_2 . \hat{\delta}(q_0, x) = q\right\}$. כלומר, המצבים ההתחליים של N יהיו אותם מצבים שאליהם ניתן להגיע ב־ L_1 ע"י קריאה של x ב־ L_2.

שימו לב שבשונה מבניות קודמות, בנייה זו אינה קונסטרוקטיבית. למעשה, אנו "מדלגים" על קריאה של x מהקלט (ע"י ניחוש מצב התחלתי מתאים) וממשיכים עם קריאה של y. פורמלית:

$$\begin{aligned}
y \in L(N) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists q \in S . \hat{\delta}'(q, y) \cap F \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \quad \exists q \in Q, x \in L_2 . \hat{\delta}(q_0, x) = q \wedge \hat{\delta}(q, y) \in F \\
&\Leftrightarrow \quad \exists x \in L_2 . \hat{\delta}(q_0, xy) \in F \\
&\Leftrightarrow \quad \exists x \in L_2 . xy \in L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad y \in L_2 \backslash L_1
\end{aligned}$$

תרגיל 6

תהינה A ו־ B שפות כלשהן המקיימות את תנאי למת הניפוח לשפות רגולריות. הוכח/הפרך: השפה $A \cup B$ מקיימת את תנאי למת הניפוח.

פתרון

הטענה נכונה. יהיו ℓ_A ו־ ℓ_B הקבועים המתאימים בלמת הניפוח. נבחר $\ell = \max\{\ell_A, \ell_B\}$ ונראה כי $A \cup B$ מקיימת את למת הניפוח עבורו. לכל מילה $w \in A \cup B$ כך ש־ $|w| \geq \ell$, אם $w \in A$ אז היות ו־ $|w| \geq \ell_A$ קיים פירוק $w = xyz$ כך ש־ $|y| > 0$, $|xy| \leq \ell_A \leq \ell$ וכן לכל $i \geq 0$ מתקיים $xy^iz \in A \subseteq A \cup B$ - כנדרש. אם $w \in B$ אז הטענה סימטרית לחלוטין.

תרגיל 7

בהנתן שפה L, נגדיר את השפה L_{per} להיות השפה שמכילה את כל הפרמוטציות של מילים ב־ L. לדוגמא, אם L מכילה את המילה abc אזי L_{per} תכיל את $\{abc, acb, bca, bac, cab, cba\}$. הוכח/הפרך: אם L רגולרית אז גם L_{per} רגולרית.

פתרון

הטענה לא נכונה. תהא $L = \{ab\}^\star$ שפה רגולרית מעל $\Sigma = \{a, b\}$. נניח בשלילה כי L_{per} רגולרית. אזי, מסגירות לחיתוך, $L_{\text{per}} \cap \left(\{a\}^\star \{b\}^\star\right)$ גם היא רגולרית. אבל,

$$L_{\text{per}} \cap \left(\{a\}^\star \{b\}\right) = \left\{a^i b^i \mid i \geq 0\right\}$$

והיא אינה רגולית. מכאן ש־ L_{per} אינה משמרת רגולריות.