מודלים חישוביים
תרגול מס' 6

7 בדצמבר 2016

נושאי התרגול:

- אוטומט מחסנית.
- פעולות סגור נוספות לשפות חסרות הקשר.

1 אוטומט מחסנית

לשפות רגולריות ראינו גם מודל מקבל (אס"ד, למשל) וגם מודל יוצר (ביטויים רגולריים, או דקדוקים רגולריים). לשפות ח"ה ראינו מודל יוצר (דקדוקים חסרי־הקשר). כעת נראה מודל מקבל - אוטומט מחסנית (PDA). אוטומט מחסנית הוא שישייה $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ כך ש:

- Q - קבוצה סופית של מצבים.
- Σ - א"ב הקלט.
- Γ - א"ב המחסנית.
- $\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma_\epsilon \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\epsilon)$ - פונקצית המעברים (שימו לב לאי־דטרמיניזם).
- $q_0 \in Q$ - מצב התחלתי.
- $F \subseteq Q$ - מצבים מקבלים.

מה המשמעות של $(q_2, c) \in \delta(q_1, a, b)$? אם אנו במצב q_1, קוראים a מהקלט ורואים b במחסנית, אנו מוציאים את b (pop), שמים במקומו c (push) ועוברים ל־ q_2. a, b או c יכולים להיות ϵ. אם $a = \epsilon$ זה אומר שהאוטומט יכול לעשות את המעבר ללא קריאה מהקלט, אם $b = \epsilon$ זה אומר שהאוטומט יכול לעשות את המעבר בלי לקרוא ולהוציא דבר מהמחסנית ואם $c = \epsilon$ זה אומר שהאוטומט לא דוחף דבר למחסנית בעת המעבר ל־ q_2.

הגדרה 1.1 נגדיר ש־ M מקבל את $w \in \Sigma^\star$ אם קיים $q' \in F$ כך ש־ $(q', t) \in \hat{\delta}(q_0, w, \epsilon)$ עבור $t \in \Gamma$ כלשהו. כלומר, אם כאשר מתחילים בקריאת w, M יכול להיות במצב מקבל q' עם ראש מחסנית t. את $L(M)$ נגדיר, כרגיל, כאוסף המילים ש־ M מקבל.

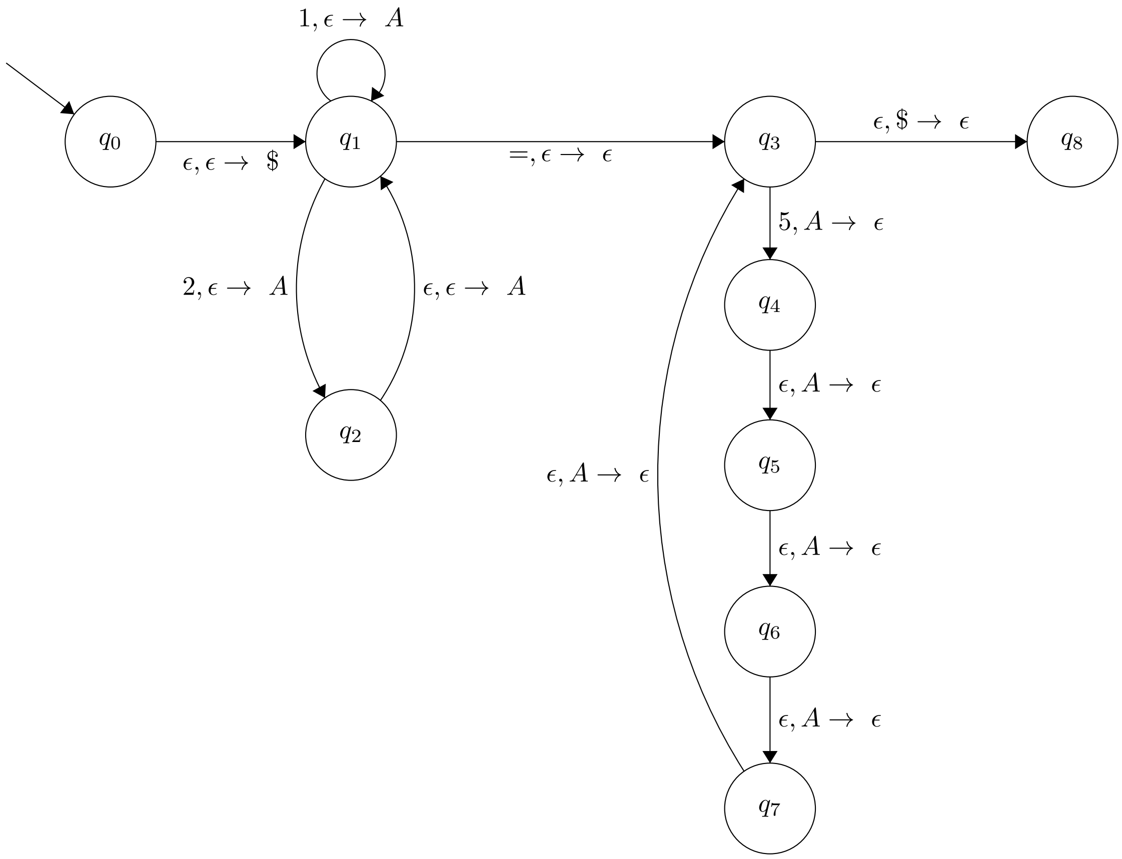
בהרצאה הוכחנו כי שפה מתקבלת ע"י אוטומט מחסנית אם"ם היא שייכת לשפה שיוצר דקדוק ח"ה. אם כך, זהו אכן אפיון נוסף לשפות ח"ה.

דוגמא 1

נבנה אוטומט מחסנית עבור השפה

$$L_2 = \left\{ x = y \mid x \in \{1,2\}^\star \wedge y \in \{5\}^\star \wedge \#_1(x) + 2 \cdot \#_2(x) = 5 \cdot \#_5(y) \right\}$$

לדוגמא, $1\,(121)^4\,21 = 5555 \in L_2$. האוטומט יהיה:



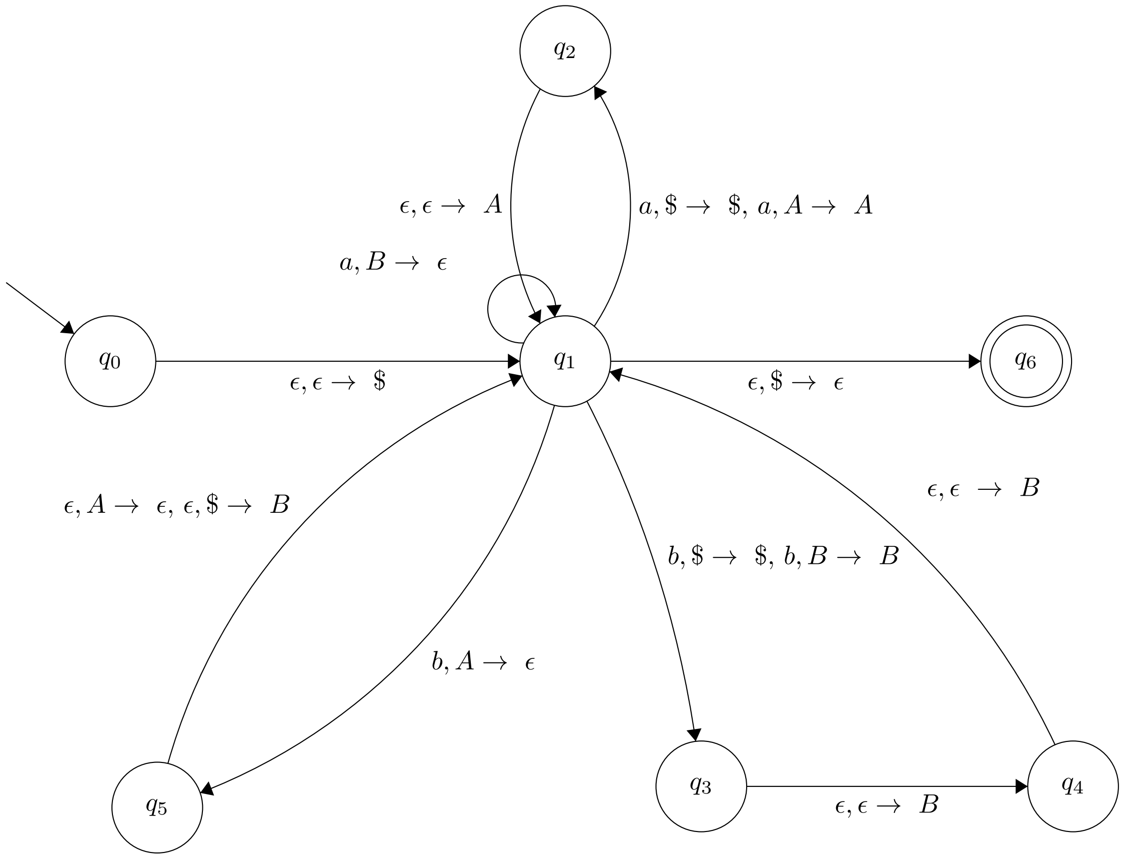
נמצא דקדוק ח"ה עבור L_2, $G = (V, \Sigma, R, S_0)$. נסמן: $V = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4\}$, $\Sigma = \{1, 2, 5, =\}$ ו־R מכיל את חוקי הגזירה הבאים:

$$\begin{aligned}
S_0 &\to 1S_1 \mid 2S_2 \mid = \\
S_1 &\to 1S_2 \mid 2S_3 \\
S_2 &\to 1S_3 \mid 2S_4 \\
S_3 &\to 1S_4 \mid 2S_05 \\
S_4 &\to 1S_05 \mid 2S_15
\end{aligned}$$

נסו לבנות דקדוק ח"ה בעל מצב יחיד המקבל את L_2.

דוגמא 2

נבנה אוטמט מחסנית עבור השפה $L_1 = \left\{ w \in \{a, b\}^\star \mid \#_a(w) = 2 \cdot \#_b(w) \right\}$:



נשים לב שאם בראש המחסנית יש לנו B, קראנו עד כה w' כך ש־ $2 \cdot \#_b(w') > \#_a(w')$ ואם יש לנו A אז $2 \cdot \#_b(w') < \#_a(w')$. מצאו דקדוק ח"ה ל־ L_1 לפי האלגוריתם שנלמד בכיתה.

תרגיל 1

הוכיחו כי השפות חסרות ההקשר סגורות תחת חיתוך עם שפות רגולריות.

פתרון

תהא L שפה ח"ה ויהא $P = (Q_P, \Sigma, \Gamma, \delta_P, q_P, F_P)$ האוטומט מחסנית (PDA) שמקבל אותה ותהא L' שפה רגולרית כך ש־ $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_A, F_A)$ הוא אס"ד (DFA) המקבל אותה. נבנה אוטומט מחסנית P' כך שיתקיים $L(P') = L \cap L'$.

$$P' = (Q_P \times Q_A, \Sigma, \Gamma, \delta', (q_P, q_A), F_P \times F_A)$$

נצטרך להגדיר את δ_A גם על ϵ. לשם כך, נרחיב את δ_A כך: לכל $q \in Q_A$, $\delta_A(q, \epsilon) = q$. כעת, לכל $q_1 \in Q_P$, $q_2 \in Q_A$, $\sigma \in \Sigma_\epsilon$ ו־ $\gamma \in \Gamma_\epsilon$:

$$\delta'((q_1, q_2), \sigma, \gamma) = \{((r, s), \gamma') \mid (r, \gamma') \in \delta_P(q_1, \sigma, \gamma) \wedge s = \delta_A(q_2, \sigma)\}$$

כדי להוכיח את הטענה, נצטרך להוכיח תחילה שתי למות, אשר הוכחתן תשאר כתרגיל (ההוכחה - באינדוקציה על אורך w):

למה 1.2 קיים מסלול חישוב של P על w שמסתיים במצב מקבל $q \in F_P$ אס"ם קיים מסלול חישוב של P' על w שמסתיים במצב (q, q') עבור $q' \in Q_A$ כלשהו.

למה 1.3 כל מסלול חישוב של A על w מסתיים במצב מקבל $q \in F_A$ אס"ם כל מסלול חישוב של P' על w מסתיים במצב (q', q) עבור $q' \in Q_P$ כלשהו.

כעת, אם $w \in L \cap L'$ אזי מהלמה הראשונה קיים מסלול חישוב של P על w שמסתיים במצב מקבל $f_P \in F_P$. מהלמה השנייה, כל מסלול חישוב של A על w מסתיים במצב מקבל $f_A \in F_A$. מכאן, שקיים מסלול חישוב של P' על w שמתסיים ב־ (f_P, f_A). (f_P, f_A) הוא מצב מקבל של P' ולכן $w \in L(P')$. הכיוון השני סימטרי.

2 פעולות סגור נוספות לשפות חסרות הקשר

ראינו כי השפות חסרות ההקשר סגורות תחת איחוד, שרשור, סגור קליני, חיתוך עם שפה רגולרית, הומומורפיזם והומומורפיזם הפוך.

תרגיל 2

הוכיחו כי השפות חסרות ההקשר אינן סגורות תחת

$$C(L_1, L_2) = \{xyz \mid xy \in L_1 \wedge yz \in L_2 \wedge x, y, z \neq \epsilon\}$$

פתרון

נבחר:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{0^n \# 1^n \# \mid n \geq 0\} \\ L_2 &= \{\# 1^n \# 2^n \mid n \geq 0\} \end{aligned}$$

מעל $\Sigma = \{0, 1, 2, \#\}$ ושימו לב כי

$$C(L_1, L_2) = \{0^n \# 1^n \# 2^n \mid n \geq 0\} \cup \{0^n \# 1^n \# 1^m \# 2^m \mid n, m \geq 0\}$$

כעת, נניח בשלילה כי $C(L_1, L_2)$ ח"ה ונסמן $\Delta = \{0, 1, 2\}$. אזי, מסגירות לחיתוך רגולרי, גם

$$L' = C(L_1, L_2) \cap L(\Delta^\star \# \Delta^\star \# \Delta^\star) = \{0^n \# 1^n \# 2^n \mid n \geq 0\}$$

חסרת הקשר. נגדיר הומומורפיזם $h : \Sigma \to \Delta^\star$ כך ש־ $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, $h(2) = 2$ ו־ $h(\#) = \epsilon$. נקבל שגם

$$h(L') = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 0\}$$

חסרת הקשר, בסתירה למה שראינו בכיתה. אם כך, $C(L_1, L_2)$ אינה חסרת הקשר.

תרגיל 3

תהא $L \subseteq \Sigma^\star$. הוכיחו כי השפות חסרות ההקשר אינן סגורות תחת

$$DropMiddle(L) = \{xy \in \Sigma^\star \mid \exists \sigma \in \Sigma . x\sigma y \in L \wedge |x| = |y|\}$$

פתרון

נבחר

$$L = \{0^n 1^n 4 2^m 3^m \mid m, n \geq 0\}$$

זוהי שפת ח"ה. כדי לראות זאת, נוכל להגדיר $L_1 = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$, $L_2 = \{4\}$ ו־ $L_3 = \{2^n 3^n \mid n \geq 0\}$, ששלושתן חסרות הקשר, ואז

$$L = L_1 \circ L_2 \circ L_3$$

גם חסרת הקשר, מסגירות לשרשור. נניח בשלילה ש־ $DropMiddle(L)$ גם ח"ה. מסגירות לחיתוך עם שפות רגולריות, גם

$$L' = DropMiddle(L) \cap \{0, 1, 2, 3\}^\star = \{0^n 1^n 2^n 3^n \mid n \geq 0\}$$

חסרת הקשר. אך קל לראות שאם נגדיר הומומורפיזם h הממפה כל תו לעצמו ואת 3 ל־ ϵ נקבל כי גם $h(L') = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 0\}$ חסרת הקשר, בסתירה למה שראינו בכיתה.

תרגיל 4

הראו כי אם L רגולרית, אזי $Mirror\left(L\right)=\left\{ ww^{R}\mid w\in L\right\}$ חסרת הקשר.

פתרון

תהא L שפה רגולרית ו־ $M=\left(Q,\Sigma,\delta,q_{0},F\right)$ אס"ד המקבל אותה. הרעיון: נבנה אוטומט מחסנית המדמה את M ומכניס את אותיות הקלט למחסנית. האוטומט ינחש מתי אנו עוברים לקרוא את w^{R} ויעבור לריקון מחסנית. אם המחסנית ריקה, נקבל. פורמלית, נגדיר:

$$P=\left(Q\cup\left\{ s,r,q_{f}\right\} ,\Sigma_{\epsilon},\Sigma\cup\left\{ \$\right\} ,\delta',s,\left\{ q_{f}\right\} \right)$$

כך ש־

- s הוא המצב ההתחלתי החדש.
- r הוא המצב שאליו P עוברת כאשר היא מנחשת שקריאת w הסיימה והחלה קריאת w^{R}.
- q_{f} הוא המצב המקבל החדש.
- פונקצית המעברים δ':
  - $\delta'\left(s,\epsilon,\epsilon\right)=\left(q_{0},\$\right)$. מתחילים בלדחוף \$ למחסנית ולעבור למצב ההתחלתי של M.
  - $\forall q_{i}\in Q,\sigma\in\Sigma.\delta'\left(q_{i},\sigma,\epsilon\right)=\left\{ \left(q_{j},\sigma\right)\right\}$ כך ש־ $\delta\left(q_{i},\sigma\right)=q_{j}$. זהו הסימלוץ של M.
  - $\forall q\in F.\delta'\left(q,\epsilon,\epsilon\right)=\left\{ \left(r,\epsilon\right)\right\}$. בהגעה למצב מקבל של M עוברים ל־ r מבלי לשנות את תוכן המחסנית.
  - $\forall\sigma\in\Sigma.\delta'\left(r,\sigma,\sigma\right)=\left\{ \left(r,\epsilon\right)\right\}$. מהמצב r, אם מקבלים אות בקלט שגם נמצאת בראש המחסנית, מוציאים את האות מהמחסנית ונשארים ב־ r.
  - $\delta'\left(r,\epsilon,\$\right)=\left\{ \left(q_{f},\$\right)\right\}$. אם הצלחנו לרוקן את כל w^{R}, עוברים למצב מקבל.

הוכיחו פורמלית כי $L\left(P\right)=Mirror\left(L\right)$.