

# מודלים חישוביים

## תרגול מס' 8

21 בדצמבר 2016

נושאי התרגול:

- המחלקות R ו-RE.
- מונים (Enumerators).

### 1 המחלקות R ו-RE

**1.1 הגדרה** מ"ט  $M$  מקבלת (accepts) שפה  $L$  אם על קלט  $w$ : אם  $w \in L$  היא מגיעה למצב מקבל ואם  $w \notin L$  היא מגיעה למצב דוחה או לא עוצרת.

**1.2 הגדרה** מ"ט  $M$  מכריעה (decides) שפה  $L$  אם על קלט  $w$ : אם  $w \in L$  היא מגיעה למצב מקבל ואם  $w \notin L$  היא מגיעה למצב דוחה. בפרט, תמיד עוצרת.

**1.3 הגדרה** נגיד ש- $L \in RE$  אם קיימת מ"ט  $M$  המקבלת את  $L$ . נגיד ש- $L \in R$  אם קיימת מ"ט  $M$  המכריעה את  $L$ .

**1.4 הגדרה** המחלקה coRE היא מחלקת השפות שמשלימן הוא ב-RE. כלומר,  $L \in coRE$  אם קיימת מ"ט  $M$  המקבלת את  $\bar{L}$ . הוכחנו בכיתה כי  $R = RE \cap coRE$ .

נזכיר כמה שפות מפורסמות:

- בעית העצירה -  $H_{TM} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ is a TM and } M \text{ halts on } w\} \in RE \setminus R$
- בעית הקבלה -  $A_{TM} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ is a TM and } M \text{ accepts } w\} \in RE \setminus R$
- $L_3 = \{\langle M_1 \rangle, w_1, \langle M_2 \rangle, w_2 \mid w_1 \in L(M_1) \wedge w_2 \notin L(M_2)\} \notin RE \cup coRE$

כמו כן, נזכיר כי המחלקה R סגורה תחת משלים, איחוד וחיתוך.

### תרגיל 1

הוכיחו כי RE סגורה תחת איחוד.

### פתרון

תהינה  $M_1, M_2$  מ"ט המקבלות את  $L_1, L_2$  בהתאמה. נבנה  $M$  שעל קלט  $w$ :

1. מסמלצת את  $M_1$  ו- $M_2$  על  $w$  במקביל (דהיינו, בכל שלב מסמלצים צעד אחד בכל אחת מהמכונות).
2. אם אחת מהן קיבלה, קבל.
3. אם שתיהן דחו, דחה.

נכונות: אם  $w \in L_1 \cup L_2$  אזי אחד מהסמלוצים יעצור ויקבל ומכאן ש- $M$  תקבל. אם  $w \notin L_1 \cup L_2$  אזי אף אחד מהסמלוצים לא יעצור ויקבל ולכן  $M$  תדחה או לא תעצור לעולם.

## תרגיל 2

נגדיר את השפה  $E_{TM} = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\}$ . הוכיחו כי  $E_{TM} \in \text{coRE}$ .

### פתרון

נוכיח כי  $\overline{E_{TM}} \in \text{RE}$ . נבנה מ"ט  $M'$  שמקבלת את  $\overline{E_{TM}}$  כך שעל קלט  $\langle M \rangle$ :

1. בודקת כי  $\langle M \rangle$  הוא קידוד חוקי של מ"ט. אם לא, מקבלת. יהא  $\Sigma$  הא"ב שמעליו  $M$  עובדת. יהא  $x_1, x_2, \dots$  הסדר הלכסיקוגרפי של כל המילים מעל  $\Sigma^*$ .
2. לכל  $i$  החל מ-1:

(א) לכל  $j$  מ-1 עד  $i$ :

- i. סמלץ את  $M$  על  $x_j$  למשך  $i$  צעדים.
- ii. אם  $M$  מקבלת, קבל.

הנכונות:

- אם  $\langle M \rangle \in \overline{E_{TM}}$  אזי קיימים  $i, j$  כך ש- $M$  מקבלת את  $x_j$  לאחר  $i$  צעדים. מכאן, ש- $M'$  תקבל. \
  - אם  $\langle M \rangle \notin \overline{E_{TM}}$  אזי  $\langle M \rangle \in E_{TM}$  ולכן לכל  $j$   $M$  לא תקבל את  $x_j$  (לא למשנה לאחר כמה צעדים), ו- $M'$  לעולם לא תקבל.
- הראינו כי  $\overline{E_{TM}} \in \text{RE}$  ולכן  $E_{TM} \in \text{coRE}$ .

## 2 מונים (Enumerators)

**2.1 הגדרה** מונה (enumerator) עבור שפה  $L$  הוא פונקציה  $f_L : \mathbb{N} \rightarrow L$  שהיא חשיבה ועל.

**2.2 משפט**  $L \in \text{RE}$  אם"ם יש לה מונה.

## תרגיל 3

מונה מונוטוני עבור שפה  $L$  הוא מונה כך שאם  $i < j$  אזי  $f_L(i) < f_L(j)$ . כלומר, הוא מונה את המילים בשפה בסדר לקסיקוגרפי. הוכיחו: לכל שפה אינסופית  $L \in \text{RE}$ , אם"ם יש ל- $L$  מונה מונוטוני.

### פתרון

נוכיח את שני הכיוונים.

#### כיוון ראשון

נניח כי  $L \in \text{RE}$ . אזי, קיימת מ"ט  $M$  המכריעה את  $L$ . נבנה מונה מונוטוני  $f_L$ : על קלט  $i$ , נריץ את  $M$  על המילים בסדר לקסיקוגרפי ונפלוט את המילה ה- $i$  שהתקבלה. שימו לב שמכיוון ש- $M$  מכריעה את  $L$ , היא בפרט עוצרת על כל קלט.  $f_L$  חשיבה, מחזירה את כל המילים ב- $L$  ומונוטונית.

#### כיוון שני

נניח כי  $L$  שפה אינסופית ו- $f_L$  הוא מונה מונוטוני עבורה. נבנה מ"ט  $M$  המכריעה את  $L$ . על קלט  $x$ :

1.  $M$  תחשב את  $f_L(1), f_L(2), \dots$

2. אם היא הגיעה ל- $i$  כך ש- $f_L(i) = x$ ,  $M$  תקבל.

3. אם היא הגיעה ל- $i$  כך ש- $f_L(i) > x$ ,  $M$  תדחה.

נכונות:

- אם  $x \in L$  אזי קיים  $i$  כך ש- $f_L(i) = x$  ולכל  $j < i$ ,  $f_L(j) < x$ . לכן,  $M$  תקבל.
- אם  $x \notin L$  אזי לכל  $i$ ,  $f_L(i) \neq x$  אזי  $M$  לא תקבל. מכיוון ש- $L$  אינסופית, קיים  $y > x$  ו- $j$  כך ש- $f_L(j) = y$ . לכן, שנגיע ל- $y$  אז  $M$  תדחה.

#### תרגיל 4

הוכיחו כי לכל שפה אינסופית  $L \in RE$  קיימת שפה אינסופית  $L' \subseteq L$  כך ש-  $L' \in R$ .

#### פתרון

$L \in RE$  אזי קיים מונה  $f_L$  עבור  $L$ . נסתכל על הסדרה  $f_L(1), f_L(2), \dots$ . נגדירה תת סדרה מונוטונית:

$$f_L(i_1), f_L(i_2), \dots$$

כך ש-  $i_1 = 1$  ו-  $i_{j+1}$  הוא המספר הקטן ביותר שגדול מ-  $i_j$  כך ש-  $f_L(i_j) < f_L(i_{j+1})$ . כעת נגדיר  
ו-  $g(j) = f_L(i_j)$

$$L' = \{g(j) \mid j \in \mathbb{N}\}$$

לפי הבנייה שלנו,  $L' \subseteq L$ , היא אינסופית ו-  $g$  הוא מונה מונוטוני.  $g$  חשיבה שכן אנו צריכים לחשב מספר סופי של מילים כדי להגיע ל-  $g(j)$ . מהתרגיל הקודם,  $L' \in R$ .