מודלים חישוביים
תרגול מס' 9

28 בדצמבר 2016

נושאי התרגול:

- רדוקציות.

1 רדוקציות

בהנתן שתי שפות A ו־ B, אם A ניתנת לרדוקציה ל־ B אז ניתן להשתמש בפתרון של B כדי למצוא פתרון של A. שימו לב שזה לא אומר דבר על האם ניתן וכיצד ניתן לפתור את A או את B לבדן. פורמלית:

הגדרה 1.1 פונקציה חשיבה $f:\Sigma^{\star}\to\Sigma^{\star}$ היא רדוקציה מ־ A ל־ B אם $w\in A$ אם"ם $f\left(w\right)\in B$. אם קיימת רדוקציה כזו ("רדוקצית מיפוי") נסמן $A\leq_{m}B$. שימו לב ש־ $A\leq_{m}B$ אם"ם $\bar{A}\leq_{m}\bar{B}$.

משפט 1.2 אם $B\leq_{m}A$ ו־ $B\in\mathrm{R}$ אז $A\in\mathrm{R}$. אם $B\leq_{m}A$ ו־ $B\in\mathrm{RE}$ אז $A\in\mathrm{RE}$.

משפט 1.3 אם $B\leq_{m}A$ ו־ $A\notin\mathrm{R}$ אז $B\notin\mathrm{R}$. אם $B\leq_{m}A$ ו־ $A\notin\mathrm{RE}$ אז $B\notin\mathrm{RE}$.

נזכיר כי ראינו כבר:

$$\begin{aligned}A_{TM} &= \{\langle M,w\rangle\mid M\text{ is a TM that accepts}\,w\}\in\mathrm{RE}\backslash\mathrm{R}\\ H_{TM} &= \{\langle M,w\rangle\mid M\text{ is a TM that halts on}\,w\}\in\mathrm{RE}\backslash\mathrm{R}\end{aligned}$$

ואם נגדיר:

$$H_{TM,\varepsilon}=\{\langle M\rangle\mid M\text{ is a TM that halts on}\,\epsilon\}$$

אז מתקיים כי $H_{TM}\leq_{m}H_{TM,\epsilon}$ (מדוע?) ולכן למשל $H_{TM,\epsilon}\notin\mathrm{R}$.

תרגיל 1

הוכיחו/הפריכו:

$$L_{1}=\{\langle M\rangle\mid M\text{ visits some state at least twice when running on}\,\varepsilon\}\in\mathrm{R}$$

פתרון

הטענה נכונה. שימו לב כי אם $\langle M\rangle\notin L_{1}$, M עוצרת לאחר לכל היותר $|Q|$ צעדים. אם כך, נבנה מ"ט M_{1} המכריעה את L_{1}. M_{1} על קלט $\langle M\rangle$:

1. אם המחרוזת $\langle M\rangle$ אינה מקודדת מ"ט חוקית, דחה.
2. חשב את $|Q|$ - מספר המצבים ב־ M.
3. הרץ את M על ϵ במשך $|Q|+1$ צעדים או עד שעצרה.

4. M_1 תשמור על הסרט את המצבים ש־ M עברה בהם בסמלוץ.
5. נבדוק האם קיים מצב ש־ M ביקרה בו פעמיים.
6. M_1 תקבל אם קיים כזה מצב ותדחה אחרת.

ברור כי M_1 עוצרת על כל קלט, והנכונות מובטחת מהאבחנה שלנו בתחילת השאלה.

תרגיל 2

הוכיחו/הפריכו:

$$L_2 = \{\langle M, q\rangle \mid M \text{ visits the state } q \text{ at least twice when running on } \varepsilon\} \in \mathrm{R}$$

פתרון

הטענה לא נכונה. נראה כי $H_{TM,\epsilon} \leq_m L_2$. צריך להראות פונקציה חשיבה $f(\langle M\rangle) = \langle M', q\rangle$ כך ש־ M עוצרת על המילה הריקה אם"ם M' מבקרת במצב q לפחות פעמיים על המילה הריקה:

- M' תהיה זהה ל־ M רק עם מצב נוסף q.
- אם M מקבלת או דוחה (כלומר, מגיעה למצב q_a או q_r), M' עוברת ל־ q ונשארת שם לנצח.
- אין אף מעבר אחר ל־ q.

כדי להוכיח נכונות, נדרש להראות:

1. הפונקציה חשיבה - קל להשתכנע כי ניתן לבנות מ"ט הכותבת את q, $\langle M'\rangle$ על הסרט שלה בהנתן הקלט $\langle M\rangle$.
2. אם M עוצרת על המילה הריקה אז M' מבקרת ב־ q על המילה הריקה לפחות פעמיים (בעצם, אינסוף פעמים) ו־ $\langle M', q\rangle \in L_2$.
3. אם M לא עוצרת על המילה הריקה אז M' לא תגיע ל־ q לעולם ו־ $\langle M', q\rangle \notin L_2$.

תרגיל 3

הוכיחו כי $L_\infty = \{\langle M\rangle \mid |L(M)| = \infty\} \notin \mathrm{RE} \cup \mathrm{coRE}$.

פתרון

נראה כי $L_\infty \notin \mathrm{RE}$ ו־ $L_\infty \notin \mathrm{coRE}$. לאחר שנוכיח את הטענה נוכל להשתמש בעובדה שאם עבור שפה A מתקיים ש־ $L_\infty \leq_m A$ אזי $A \notin \mathrm{RE} \cup \mathrm{coRE}$.

החלק $L_\infty \notin \mathrm{coRE}$

נראה כי $A_{TM} \leq_m L_\infty$ (זכרו כי $A_{TM} \notin \mathrm{coRE}$ כי אחרת $A_{TM} \in \mathrm{R}$). תהא $f(\langle M\rangle, w) = \langle M'\rangle$ כך ש־ M' על קלט x:

- תתעלם מ־ x ותריץ את M על w.
- M' תענה כמו M.

ואז:

1. הפונקציה חשיבה.
2. אם M מקבלת את w אז M' מקבלת את כל הקלטים ו־ $\langle M'\rangle \in L_\infty$.
3. אם M לא מקבלת את w אז $L(M') = \emptyset$ ו־ $\langle M'\rangle \notin L_\infty$.

החלק $L_\infty \notin \mathbf{RE}$

נראה כי $\overline{A_{TM}} \leq_m L_\infty$ (זכרו כי $\overline{A_{TM}} \notin \mathrm{RE}$ כי אחרת $A_{TM} \in \mathrm{R}$). מהמשפט שלמדנו, אנו יודעים כי מספיק להראות $A_{TM} \leq_m \overline{L_\infty}$. תהא $f(\langle M \rangle, w) = \langle M' \rangle$ כך ש־ M' על קלט x:

- תריץ את M על w למשך $|x|$ צעדים.
- אם M קיבלה, M' תדחה.
- אם M לא קיבלה, M' תקבל.

ואז:

1. הפונקציה חשיבה.
2. אם M מקבלת את w, נניח לאחר s צעדים, M' תקבל את כל הקלטים באורך קטן מ־ s ותדחה את כל הקלטים באורך גדול מ־ s. לכן, $L(M')$ סופית ו־ $\langle M' \rangle \in \overline{L_\infty}$.
3. אם M לא מקבלת את w אז M' תקבל את כל הקלטים ו־ $\langle M' \rangle \notin \overline{L_\infty}$.

תרגיל 4

הוכיחו כי $IsUnary = \left\{ \langle M \rangle \mid L(M) \subseteq \{1\}^\star \right\} \notin \mathrm{R}$.

פתרון

נראה כי $\overline{A_{TM}} \leq_m IsUnary$. תהא $f(\langle M \rangle, w) = \langle M' \rangle$ כך ש־ M' על קלט x:

- אם $x \in \{1\}^\star$, קבל.
- אחרת, הרץ את M על w.
- אם M קיבלה, M' תקבל. אם M דחתה, M' תדחה.

ואז:

1. הפונקציה חשיבה.
2. אם M לא מקבלת את w, $L(M') = \{1\}^\star$ ולכן $\langle M' \rangle \in IsUnary$.
3. אם M מקבלת את w אז $L(M') = \Sigma^\star$ ולכן $\langle M' \rangle \notin IsUnary$.