תעודת זהות: ______________________

מספר מחברת: ______________________

סה"כ	4	3	2	1

מבחן מועד א' - מודלים חישוביים, סמסטר א' תשע"ז (2017)

בית הספר למדעי המחשב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצה: פרופ' יפתח הייטנר

מתרגלות: יובל מוסקוביץ', דפנה שדה

1/02/17

פתרון

הוראות

1. מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
2. משך הבחינה – שלוש שעות.
3. חומר עזר מותר: שני דפי פוליו (דו צדדיים) בלבד עם שם התלמיד/ה.
4. **יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון (טופס זה).** מחברות הבחינה לא ייקראו, וישמשו כטיוטה בלבד.
5. יש למלא בכל דף של השאלון מספר ת.ז. ומספר מחברת.
6. במבחן 4 שאלות.
   - הניקוד לכל שאלה מופיע לידה מספר השאלה.
   - סימון "תשובה ריקה" יזכה בחלק (קטן) מהנקודות כמצוין ליד מספר השאלה.
   - יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון.
   - יש לענות תשובות ברורות ענייניות ותמציתיות.
7. מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה או בתרגול) בתנאי שמצטטים אותה במדויק. טענות אחרות (כאלה שהוכחו בספר, בתרגיל בית, בהרצאות מהסמסטר הקודם, וכו') יש להוכיח.
8. יש להניח $P\neq NP$, אלא אם מצוין אחרת.
9. הקידוד של מכונות טורינג, גרפים, נוסחאות וכו', הוא לפי הקידוד שנלמד בכיתה.
10. באם לא מצויין אחרת, ניתן להניח כי $\Sigma=\{0,1\}$.

בהצלחה!

תעודת זהות: ______________________

מספר מחברת: ______________________

שאלה 1 (25 נקודות).

אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (5 נקודות)

א. (12 נק'). נגדיר את האופרטור Perfect shuffle על השפות L_1 ו- L_2 באופן הבא

$$PS(L_1, L_2) = \{w = x_1 y_1 \cdots x_n y_n \mid w_1 = (x_1 \cdots x_n) \in L_1, w_2 = (y_1 \cdots y_n) \in L_2, \forall i\ x_i, y_i \in \Sigma\}$$

לדוגמא, עבור $L_1 = \{1{,}00{,}110\}$ ו $L_2 = \{0{,}11\}$ מתקיים $PS(L_1, L_2) = \{10, 0101\}$

הוכח או פרך: אם L_1 ו- L_2 חסרות הקשר אז $PS(L_1, L_2)$ ח"ה.

הטענה אינה נכונה. נסתכל על $L_1 = \{0^n 1^{2n} \mid n > 0\}$ ו $L_2 = \{0^{2n} 1^n \mid n > 0\}$. שתיהן ח"ה. אפשר להראות ע"י סגירות שפות ח"ה להומומורפיזם, ידוע ש $L = \{0^n 1^n \mid n > 0\}$ ח"ה. נגדיר $h_1(0) = 0$, $h_1(1) = 11$ ו $h_2(0) = 00$, $h_2(1) = 1$ ונקבל $h_1(L) = L_1$ ו $h_2(L) = L_2$. נסמן $L' = PS(L_1, L_2) = \{0^{2n}(10)^n 1^{2n} \mid n > 0\}$. נניח בשלילה ש L' ח"ה. נגדיר את ההומומורפיזם $g(a) = 00, g(b) = 10$ ו- $g(c) = 11$. מסגירות שפות ח"ה להומומורפיזם ולחיתוך עם שפות רגולריות נקבל ש $g^{-1}(L') \cap L(a^* b^* c^*) = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ ח"ה בסתירה למה שראינו בכיתה.

ב. (13 נק'). הוכח או הפרך: לכל מספר $n \geq 1$ קיימת שפה L עבורה מספר מחלקות השקילות הוא n

נכון. לדוגמא עבור $n \geq 2$, לשפה $\{0^{n-2}\}$ מעל $\Sigma = \{0\}$ יש בדיוק n מחלקות שקילות. לכל $0 \leq i \leq n-2$, יש מחלקת שקילות המכילה את המילה 0^i בלבד (סה"כ יש $n-1$ מחלקות שקילות כאלה). ובנוסף יש מחלקת שקילות שמכילה את כל המילים מאורך לפחות $n-1$. עבור $n = 1$ הדבר נכון עבור השפה הריקה.

תעודת זהות: ______________________

מספר מחברת: ______________________

שאלה 2 (25 נקודות).

אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ **(5 נקודות)**

א. (10 נק'). האם השפה הבאה ב R? ב RE? ב CO-RE? הוכח תשובתך.

$$L_A = \{\langle M, w\rangle : M \text{ is a TM}, \mathrm{w} \in \mathrm{L(M)} \text{ and M visit each state } \textbf{at most } |\mathrm{w}|^2 \text{ times}\}$$

$L_A \in R$. נראה מ"ט M' שמכריעה אותה.

M' על קלט x מבצעת:

1. בודקת האם $x = \langle M, w\rangle$ (כלומר x הוא קידוד חוקי של מכונה ומילה). אם לא דוחה.
2. אחרת, "מריצה" את M על w למשך לכל היותר $|Q||w|^2$ צעדים. במהלך הריצה M' רושמת את מספר הפעמים ש M ביקרה בכל אחד מהמצבים שלה.
3. אם M לא קיבלה בזמן הזה, M' דוחה.
4. אחרת, אם M קיבלה בזמן הזה, M' בודקת האם קיים מצב ש M ביקרה בו יותר מ $|w|^2$ פעמים. אם לא קיים מצב כזה אז M' מקבלת ואחרת דוחה.

נכונות:

אם $x = \langle M, w\rangle \in L_A$ אז M מקבלת את w ובמהלך הריצה היא מבקרת בכל מצב לכל היותר $|w|^2$ צעדים. לכן הריצה של M על w לוקחת לכל היותר $|Q||w|^2$, ולכן M' תקבל ב 4.

אם $x = \langle M, w\rangle \notin L_A$ אז ייתכנו מספר מקרים:

- x אינו קידוד חוקי של מכונה ומילה ואז M' דוחה ב 1.
- x הוא קידוד חוקי של מכונה ומילה אבל M לא מקבלת את w. M' תדחה ב 3.
- x הוא קידוד חוקי של מכונה ומילה ו M מקבלת את w, אבל מבקרת לפחות במצב אחד יותר מ $|w|^2$. אם הריצה של M על w לא מסתיימת תוך $|Q||w|^2$ צעדים אז M' תדחה ב 3, אחרת היא תדחה ב 4.

בכל מקרה M' תמיד עוצרת.

ב. (15 נק'). האם השפה הבאה ב R, RE, או באף אחת מהן. הוכח תשובתך

$$L_B = \{\langle M\rangle : M \text{ is a TM and } \mathrm{L(M)} = \mathrm{L_A}\}$$

$L_B \notin RE$.

נגדיר $C = \{L_A\}$. כיוון ש $C \subseteq R \setminus \{\Sigma^*\}$, הדבר נובע ממשפט 10 בהרצאה 10.

תעודת זהות: ____________________________

מספר מחברת: ____________________________

שאלה 3 (25 נקודות).

אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה)   (5 נקודות)

קבע האם הפונקציות הבאות ניתנות לחישוב. הוכח תשובתך.

א.   (15 נק'). הפונקציה $f1$ על קלט $\langle M\rangle$ מחזירה את מספרו של התא הימני ביותר אליו המכונה M מגיעה בריצתה על ε . אם אין תא ימני ביותר הפונקציה מחזירה ∞**.**

לא. נניח בשלילה שכן ונגדיר $M_{H_{TM,\varepsilon}}$ שתכריע את $H_{\text{TM},\varepsilon}$.

בהינתן קלט ⟨M⟩:

1. נחשב את $f_2(|\langle M\rangle|)=k$.
2. אם $k=\infty$, **נדחה.** אחרת, יהי $m=|Q||\Gamma|^k k$.
3. נסמלץ את $M(\varepsilon)$ למשך $m+1$ צעדים. אם M עצרה נקבל, אחרת נדחה.

נכונות: אם $\boldsymbol{k}=\infty$ אזי ברור כי M לא תעצור לעולם.
אחרת, m הוא חסם על מספר הקונפיגורציות השונות של M בריצה על ε . אם M לא עצרה תוך $m+1$ צעדים אזי היא חזרה על קונפיגורציה כלשהי פעמיים, ולכן לא תעצור לעולם.

ב.   (10 נק'). $f_2(n)=\max\{f_1(\langle M\rangle)|\langle M\rangle\in E_n\}$, כאשר E_n היא קבוצת קידודי כל מכונות הטיורינג עם קידוד באורך n, שעוצרות על הקלט ε. .

לא. כמו ב סעיף א, נניח בשלילה שכן ונגדיר $M_{H_{TM},\varepsilon}$ שתכריע את $H_{\text{TM},\varepsilon}$.

בהינתן קלט ⟨M⟩:

1. נחשב את $f_2(|\langle M\rangle|)=k$. יהי $m=|Q||\Gamma|^k k$.
2. נסמלץ את $M(\varepsilon)$ למשך $m+1$ צעדים. אם M עצרה נקבל, אחרת נדחה.

נשים לב שלכל n מתקיים כי $f_2(n)$ הוא מספר סופי: E_n היא קבוצה **סופית** המכילה קידודים של מ"ט שעוצרות על ε. בפרט, לכל מכונה ב E_n התא הימני אליו היא מגיעה הוא מספר סופי. לכן $f_2(n)$ זה מקסימום של מספר סופי של מספרים סופיים, ולכן סופי.

נכונות: אם M עוצרת על ε, אזי $\langle M\rangle\in E_n$ ומהגדרת f_2 היא עושה זאת תוך לכל היותר m צעדים.

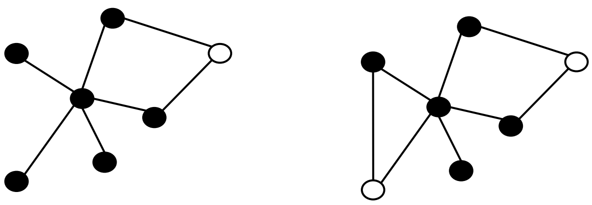
תעודת זהות:____________________________
מספר מחברת:___________________________

שאלה 4 (25 נקודות).

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V,E)$ נאמר שקבוצה $S \subseteq V$ של קודקודים היא כוכב אם קיים $v \in S$ שעבורו

- $\forall u \in S \ \ (u,v) \in E$
- $\forall u,u' \in S \setminus \{v\} \ \ (u,u') \notin E$

נאמר ש G מכיל כוכב בגודל k אם $|S| = k$.
לדוגמא



לדוגמא הגרף השמאלי מכיל כוכב בגודל 6 (כאשר S מכילה את כל הקודקודים הצבועים) והגרף הימני אינו מכיל כוכב בגודל 6, אבל כן מכיל כוכב בגודל 5.
נגדיר $STAR = \{\langle G,k \rangle \mid G \text{ is an undirected graph with a star of size } k\}$

א. (5 נק'). הוכיחו כי $STAR \in \mathcal{NP}$.

נראה שקיים מוודא פולינומי. בהינתן קלט $G = (V,E)$ ועד c, המוודא יבדוק ש c היא קבוצת קודקודים $(c \subseteq E)$ בגודל k וקיים קודקוד $v \in c$ כך ש $\{(u,v) \mid u \in S\} \subseteq E$ וגם לכל $u,u' \in S \setminus \{v\}$, $(u,u') \notin E$. אם קיים כזה יקבל ואחרת ידחה.
ניתן לעשות זאת בזמן פולינומי בקלט (דורש מעבר על כל הקודקודים ב c, ובכל פעם מעבר על הקשתות) ולכן המוודא ירוץ בזמן פולינומי. כמו כן אם G מכיל כוכב בגודל k אזי קיים c כך ש המוודא מקבל את ואחרת לא קיים c כזה.

ב. (20 נק'). הוכיחו כי $STAR \in \mathcal{NPC}$

נראה רדוקציה $IS \leq_p STAR$.
פונקצית הרדוקציה $F(\langle G,k \rangle) = \langle G', k+1 \rangle$ כך ש $G' = (V',E')$ זהה ל $G = (V,E)$ בתוספת קודקוד $v' \notin V$ המחובר לכל שאר הקודקודים בגרף, כלומר $E' = E \cup \{(v',v) \mid v \in V\}$.

נכונות:

- רדוקציה פולינומית - דורשת הוספת קודקוד אחד ו $|V|$ קשתות ל G.
- אם $\langle G,k \rangle \in IS$ אז קיימת ב G קבוצה בת"ל של קודקודים $C \subseteq E$ בגודל k, כלומר לכל $v,u \in C$, $(v,u) \notin E$. מבניית G' נובע ש $(v,u) \notin E'$ כיוון שלא הוספנו קשתות פרט לקשתות שמחברות את הקודקוד החדש v'. בנוסף $(v',v) \in E'$ לכל $v \in C$. לכן $S = C \cup \{v'\}$ היא כוכב בגודל $k+1$, כלומר $\langle G', k+1 \rangle \in STAR$
- אם $\langle G,k \rangle \notin IS$ אז לא קיימת ב G קבוצה בת"ל של קודקודים $C \subseteq E$ בגודל k. נניח בשלילה ש G' מכיל כוכב S בגודל $k+1$, בפרט קיים $v \in S$ שעבורו

תעודת זהות:

מספר מחברת:

$\forall u,u' \in S \setminus \{v\}\ (u,u') \notin E'$. נסמן ב $C = S \setminus \{v\}$. $|C| = k$ ומתקיים $\forall u,u' \in C\ (u,u') \notin E$ מכיוון שבבניית G' מוסיפים קודקוד אחד בלבד ושמחובר לכל שאר הקודקודים ולכן לא ייתכן שנוצר זוג קודקודים חדש שאינם מחוברים זה לזה.
כלומר C היא קבוצה בת"ל ב G וזו סתירה לכך ש $\langle G,k\rangle \notin IS$, לכן G' לא מכיל כוכב בגודל $k+1$, כלומר $\langle G',k+1\rangle \notin STAR$.