

סהב	5	4	3	2	1

## תקציר פתרונות

### מבחן מועד ב' - מודלים חישוביים, סמסטר ב' תשע"ג (2013)

בית הספר למדעי המחשב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: פרופ' ישי מנצור, ד"ר יפתח הייטנר

מתרגלים: מריאנו שיין, אורן זלצמן

28/08/13

### הוראות

1. מומלץ לקרא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
2. משך הבחינה – שלוש שעות. לא תינתן כל הארכה נוספת.
3. חומר עזר מותר: שני דפי פוליו (דו צדדיים) בלבד עם שם התלמיד/ה.
4. יש לענות על השאלות הסגורות בטופס התשובות ועל השאלות הפתוחות במקום המיועד לכך בטופס השאלון (טופס זה). מחברות הבחינה לא ייקראו, וישמשו כטיטה בלבד.
5. יש למלא בכל דף של השאלון מספר ת.ז. ומספר מחברת. יש למלא בטופס התשובות שם, מספר ת.ז. ומספר גרסה.
6. במבחן 14 שאלות סגורות ו-5 שאלות פתוחות.
  - א. בנוגע לשאלות הסגורות:
    - סה"כ 32 נקודות. הניקוד לכל שאלה מופיע לידה מספר השאלה.
    - תשובה שגויה לא תזכה לנקודות.
    - לכל שאלה יש לסמן תשובה אחת בטופס התשובות המצורף.
    - יש לזכור למלא שם, ת.ז. ומספר גרסה בטופס התשובות המצורף.
  - ב. בנוגע לשאלות הפתוחות:
    - סה"כ 70 נקודות. הניקוד לכל שאלה מופיע לידה מספר השאלה.
    - סימון "תשובה ריקה" יזכה בחלק (קטן) מהנקודות כמצוין ליד מספר השאלה.
    - יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון.
    - יש לענות תשובות ברורות ענייניות ותמציתיות.
7. מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה, בתרגול, או בתרגיל בית) בתנאי שמצטטים אותה במדויק. טענות אחרות (כאלה שהוכחו בספר, בהרצאות מהסמסטר הקודם, וכו') יש להוכיח.
8. יש להניח  $P \neq NP$ , אלא אם מצוין אחרת.

מספר הגרסה שלך הוא: 1 סמן זאת כרגע בטופס התשובות!

*בהצלחה!*

## חלק א: שאלות סגורות

### חלק א.1

עבור חמש בעיות (שפות) A, B, C, D ו-E נתון:

- יש רדוקציה פולינומיאלית מ-A ל-B
- יש רדוקציה פולינומיאלית מ-B ל-C
- יש רדוקציה פולינומיאלית מ-E ל-B
- יש רדוקציה פולינומיאלית מ-B ל-D

בכל אחת מהשאלות הבאות מוצגת טענה. בטופס התשובות יש לבחור ע"פ המפתח הבא:

- הטענה נכונה, עבור כל בחירה של השפות A, B, C, D ו-E
- הטענה לא נכונה, עבור כל בחירה של השפות A, B, C, D ו-E
- לפעמים (בחירה של השפות A, B, C, D ו-E) הטענה נכונה ולפעמים הטענה אינה נכונה

### טענה 1 (2 נקודות)

A היא NP-complete ולא ב-P, ו-D היא ב-P

ב

### טענה 2 (2 נקודות)

אם D ו-E הן NP-complete, אזי B היא NP-complete

א

### טענה 3 (2 נקודות)

A היא ב-P, ו-E היא NP-complete ולא ב-P

ג

### טענה 4 (2 נקודות)

אם C אינה ב-P ו-B היא ב-P, אזי A ב-P

א

### טענה 5 (2 נקודות)

B היא ב-P, C היא ב-co-NP ו-D היא ב-NP

ג

## חלק א.2

עבור חמש בעיות (שפות) A, B, C, D, E נתון:

- יש רדוקציה מיפויי מ-A ל-B
- יש רדוקציה מיפויי מ-B ל-C
- יש רדוקציה מיפויי מ-E ל-B
- יש רדוקציה מיפויי מ-B ל-D

בכל אחת מהשאלות הבאות מוצגת טענה. בטופס התשובות יש לבחור ע"פ המפתח הבא:

- הטענה נכונה, עבור כל בחירה של השפות A, B, C, D, E
- הטענה לא נכונה, עבור כל בחירה של השפות A, B, C, D, E
- לפעמים (בחירה של השפות A, B, C, D, E) הטענה נכונה ולפעמים הטענה אינה נכונה

### טענה 6 (2 נקודות)

C אינה ב-R ו-E היא ב-R

ג

### טענה 7 (2 נקודות)

D היא ב-RE ולא ב-R, ו-A אינה ב-RE

ב

### טענה 8 (2 נקודות)

אם D היא ב-co-RE אזי המשלים של E היא ב-RE

א

### טענה 9 (2 נקודות)

B אינה ב-co-RE ו-C היא NPC

ב

### טענה 10 (2 נקודות)

אם C היא ב-RE ו-D היא ב-co-RE אזי B היא ב-R

א

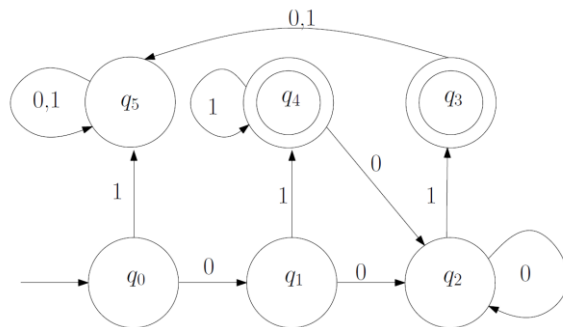
**חלק א.3**

בכל אחת מן השאלות הבאות נתונות שתי שפות  $L_1$  ו  $L_2$  . סמן עבור כל שאלה:

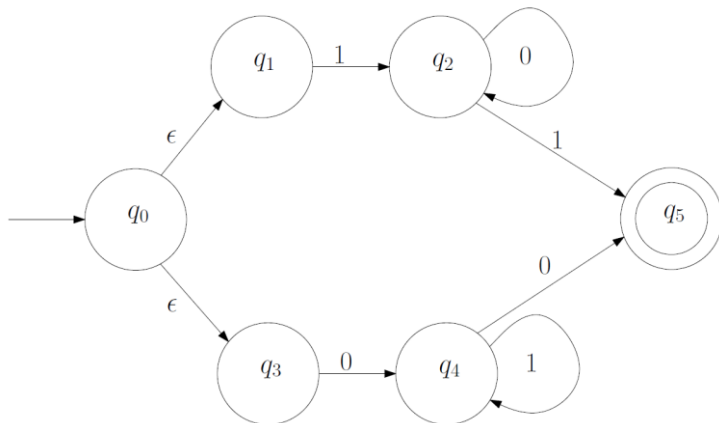
- א. אם מתקיים  $L_1 \subsetneq L_2$
- ב. אם מתקיים  $L_2 \subsetneq L_1$
- ג. אם מתקיים  $L_1 = L_2$
- ד. אם לא מתקיים אף אחד מהסעיפים הנ"ל

**טענה 11 (3 נקודות)**

כאשר  $L_1 = L(D)$  הינו אוטומט סופי דטרמיניסטי אשר מתואר ע"י האיור הבא:



כאשר  $L_2 = L(N)$  הינו אוטומט סופי לא דטרמיניסטי אשר מתואר ע"י האיור הבא:



ד

**טענה 12 (3 נקודות)**

כאשר  $L_1 = L(G)$  הינו דקדוק חסר הקשר אשר מתואר ע"י כללי הגזירה הבאים:

$$S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid \epsilon$$

כאשר  $L_2 = L(R)$  הינו הביטוי הרגולרי:  $R = ((0 \cup 1)^* \cup (1 \cup 0)^*)^*$

א

**טענה 13 (3 נקודות)**

כאשר  $L_1 = L(R)$  הינו הביטוי הרגולרי:  $R = (0 \cup 1)(01 \cup 10)^*(1 \cup 0)$

כאשר  $L_2 = L(R)$  הינו הביטוי הרגולרי:  $R = ((0 \cup 1)(0 \cup 1))^*$

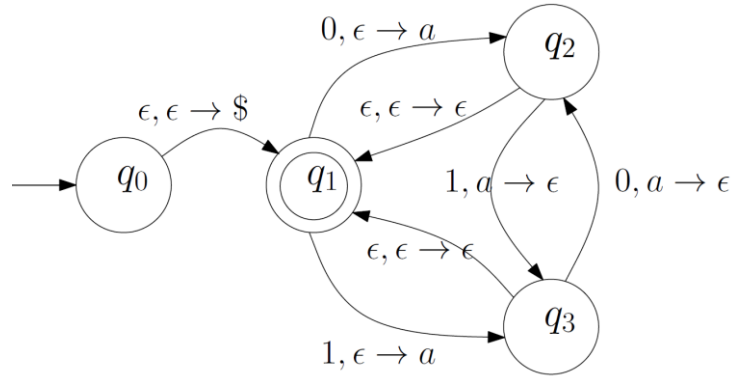
א

**טענה 14 (3 נקודות)**

$L1 = L(G)$  כאשר  $G$  הינו דקדוק חסר הקשר אשר מתואר ע"י כללי הגזירה הבאים:

$$S \rightarrow SS \mid 1 \mid 0 \mid \epsilon$$

$L2 = L(P)$  כאשר  $P$  הינו אוטומט מחסנית אשר מתואר ע"י האיור הבא:



## חלק ב: שאלות פתוחות

שאלה 1 (20 נקודות).  
אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) □ (4 נקודות)

בעיית ההכרעה  $HamiltonianEdge$  היא הבעיה הבאה:

קלט: גרף (מכוון)  $G = \langle V, E \rangle$  וקשת  $e \in E$ .

שאלה: האם קיים ב  $G$  מעגל המילטוני העובר דרך  $e$ ?

הוכח כי  $HamiltonianEdge$  היא  $NPC$ :

1. הראה כי  $HamiltonianEdge$  היא ב  $NP$ .
2. הראה רדוקציה מ  $HamiltonianPath$  ל  $HamiltonianEdge$ .

1. העד הוא מסלול הגרף, המוודא בודק שהוא מעגל המילטוני העובר דרך  $e$ .
2. בהנתן גרף  $G$  ושני קודקדים  $s$  ו  $t$ , פונקצית המיפוי  $f$  פולטת גרף  $G'$  הזזה ל  $G$ , אך בתוספת קודקוד חדש  $x$  ושתי קשתות  $e_1$  מ  $t$  ל  $x$ , ו  $e_2$  מ  $x$  ל  $s$ , ופולטת גם את הקשת  $e_1$ .  
a. ברור כי  $f$  היא יעילה.

$$(G', e_1) = f(G, s, t)$$

- b. בהנתן שב  $G$  יש מסלול המילטוני מ  $s$  ל  $t$ , המעגל המילטוני ב  $G'$  שעובר ב  $e_1$  מורכב ממסלול זה שבסיומו  $x$ .
- c. בהנתן שב  $G'$  יש מעגל המילטוני העובר ב  $e_1$ , המסלול המילטוני מ  $s$  ל  $t$  ב  $G$  יתקבל ממעגל זה ע"י הקשתות הורדת  $e_1$  ו  $e_2$ .

תעודת זהות:

מספר מחברת:

**שאלה 2 (20 נקודות).**

**אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה)  (4 נקודות)**

נתונה השפה הבאה:

$L = \{ \langle M \rangle : M \text{ is a Turing Machine and } |L(M)| = 2013 \}$

1. הראה ש  $L$  אינה ב-RE.

2. הראה ש  $L$  אינה ב-co-RE.

1. נראה רדוקציית מיפוי מהמשלים של בעיית העצירה (למה זה פותר את השאלה?)

בהנתן מכונה  $M$ , הרדוקציה פולטת מכונה  $M'$  ש:

a. מקבלת את 2013 המחרוזות הקטנות ביותר בא"ב.

b. על שאר הקלטים, ראשית מריצה את  $M$  על הקלט הריק, ואז מקבלת.

2. נראה רדוקציית מיפוי מבעיית העצירה (למה זה פותר את השאלה?)

בהנתן מכונה  $M$ , הרדוקציה פולטת מכונה  $M'$  ש:

a. על 2013 המחרוזות הקטנות ביותר בא"ב, ראשית מריצה את  $M$  על הקלט הריק, ואז

מקבלת.

b. דוחה את שאר הקלטים.

**שאלה 3 (10 נקודות).**  
**אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה)  (2 נקודות)**

נתון תיאור פורמלי של האוטומט מחסנית P. מה השפה ש-P מקבל (דהיינו תאר את L(P)):  
 $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$

כאשר:

$$\begin{aligned} Q &= \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\} & \Sigma &= \{0, 1\} & \Gamma &= \{\$, a\} & F &= \{q_5\} & \text{and} \\ \delta(q_0, \epsilon, \epsilon) &= \{(q_1, \$)\} & \delta(q_1, 1, \epsilon) &= \{(q_1, a)\} & \delta(q_1, 0, a) &= \{(q_2, \epsilon)\} & \delta(q_2, 0, a) &= \{(q_2, \epsilon)\} \\ \delta(q_2, \epsilon, \$) &= \{(q_3, \$)\} & \delta(q_3, 0, \epsilon) &= \{(q_3, a)\} & \delta(q_3, 1, a) &= \{(q_4, \epsilon)\} & \delta(q_4, 1, a) &= \{(q_4, \epsilon)\} \\ \delta(q_4, \epsilon, \$) &= \{(q_5, \$)\} & & & & & & \end{aligned}$$

$$1 \leq i, j \leq 10^{i+j}$$



תעודת זהות:

מספר מחברת:

שאלה 4 (10 נקודות).  
אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה)  (2 נקודות)

הגדרה: שתי נוסחאות בוליאניות מעל אותו אוסף משתנים הן שקולות, אם ערך האמת שלהן שווה בכל השמה.

הוכיחו כי בעיית ההכרעה שלהלן היא ב co-NPC:

קלט: שתי נוסחאות בוליאניות  $A_1$  ו  $A_2$  מתצורת CNF על אותו אוסף משתנים.  
שאלה: האם הנוסחאות  $A_1, A_2$  שקולות?

תחילה נראה שהמשלים לשפה ב-NP. המוודא מקבל הצבה  $x$  ובודק שהיא מספקת אחת משני הנוסחאות ולא את השניה.

השפה not-SAT, הנוסחאות שאינן מסופקות, הינה שלמה ל- co-NP  
CoNP נראה רדוקציה פולינומיאלית מ notSAT ל בעיית השקילות:  
בהינתן נוסחה  $Z$  עבור notSAT נוציא  $(Z, 0)$  כאשר  $0$  זאת נוסחה שלא ניתן לספק.  
אם  $Z$  אינה ספיקה אזי היא שקולה ל-0, ולהיפך.

תעודת זהות:

מספר מחברת:

שאלה 5 (10 נקודות).  
אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה)  (2 נקודות)

האם נכון ש-  $\bar{A}_{TM} \leq_M A_{TM}$

תשובה: נכון \ לא נכון

הסבר:

ידוע כי  $A_{TM}$  היא ב-RE  
אם הייתה רדוקציה מיפויי כזאת אזי גם  $\bar{A}_{TM}$  היא ב-RE  
ומכאן ש-  $A_{TM}$  היא ב-R, סתירה!