מס' ת.ז.:___________________ מס' מחברת:_________

מבחן מועד א' במודלים חישוביים, סמסטר ב' 2007

בית הספר למדעי המחשב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצה: פרופ' בני שור
מתרגלים: ריקי רוזן, יובל ענבר, אודי בוקר

22/7/07

הוראות

1. **מומלץ לקרא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.**
2. משך הבחינה – **שלוש שעות.** חומר עזר מותר: **שני** דפי פוליו (דו צדדיים) בלבד.
3. יש לענות על השאלות הפתוחות במקום המיועד לכך בטופס השאלון (טופס זה) ועל השאלות הסגורות בטופס התשובות.
   מחברות הבחינה לא ייקראו, וישמשו כטיוטה בלבד.
4. יש למלא בכל דף של השאלון מספר ת.ז. ומספר מחברת.
5. יש למלא בטופס התשובות שם, ומספר ת.ז.
6. במבחן 2 שאלות "פתוחות" ו-10 שאלות "סגורות".
   א. בנוגע לשאלות הפתוחות:
   - הניקוד לכל סעיף מופיע בתחילת הסעיף.
   - יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון.
   - יש לענות תשובות ברורות ותמציתיות. תשובות מסורבלות יגררו הורדת נקודות.
   - לכל סעיף התשובה "**אינני יודע/ת**" מזכה ב-20% ממשקל הסעיף. במקרה זה **אין להוסיף** שום הסבר.

   ב. בנוגע לשאלות הסגורות:
   - לכל שאלה יש לסמן תשובה אחת בדף התשובות המצורף.
   - יש לזכור למלא שם, ת.ז. **ומספר גרסה** בדף התשובות המצורף.
   - הניקוד לכל שאלה הוא 5 נקודות.
7. יש לדאוג שהבודקים יוכלו לקרוא את התשובות ללא שימוש במיקרוסקופ, תוכנה לזיהוי תווים, או פניה לבעלת אוב.
8. כל המספרים המופיעים בהגדרות הם מספרים שלמים, אי שליליים, ונתונים בייצוג בינארי, אלא אם כן נאמר במפורש אחרת.
9. בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק ***בתיאור מילולי משכנע*** של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר את פונקציית המעברים שלה, אלא אם הדבר התבקש במפורש.
10. מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה, בתרגול, או בתרגיל בית) בתנאי שמצטטים אותה באופן מדוייק. טענות אחרות (כאלה שהוכחו בספר, בהרצאות מהסמסטר הקודם, בבחינות בטכניון מ-1989, וכו') יש להוכיח.
11. **בכל השאלות הניחו כי: $NP\neq coNP$ ו-$NP\neq P$, למעט אם נאמר אחרת.**

בהצלחה (וחופש נעים)!

חלק א' – פתרון מקוצר

<u>שאלה 1</u> (25 נקודות)

נאמר כי גרף לא מכוון $G=(V,E)$ הוא k-צביע אם קיימת פונקציה $C:V\rightarrow\{1,2\ldots,k\}$ כך שלכל $(u,v)\in E$ מתקיים: $C(u)\neq C(v)$. כלומר, הגרף הינו-k צביע אם ניתן לצבוע את קודקודיו ב- k צבעים, כך שכל שני קודקודים שמחוברים בקשת צבועים בצבע שונה.
נסמן $k\text{-Col} = \{<G> \mid G \text{ הוא גרף לא מכוון k-צביע}\}$.
(**שימו לב** שבהגדרת k-Col, k איננו חלק מהקלט <G>)

מס' ת.ז.:__________________ מס' מחברת:_________

א. (12 נקודות)
הראו כי לכל $k\geq 1$ טבעי קיימת רדוקציה פולינומיאלית מ- k-Col אל (k+1)-Col
(כלומר, יש להראות ש- $k\text{-Col} \leq_p (k+1)\text{-Col}$).

<u>בנייה והוכחה:</u>

בהינתן $G=(V,E)$ קלט ל k-Col הרדוקציה תמפה ל $G'=(V\cup\{s\},E')$ קלט ל (k+1)-Col כאשר $E'=E\cup\{(s,u)|\ u\in V\}$ כלומר מוסיפים קודקוד חדש s ומחברים אותו לכל יתר קודקודי G.

<u>ברור שהרדוקציה חשיבה ופולינומיאלית.</u>

נכונות: צ"ל $G\in k\text{-Col}$ אם"ם $G'\in (k+1)\text{-Col}$.

<u>$\Leftarrow$)</u> אם $G\in k\text{-Col}$ אז ניתן לצבוע את G ב- k צבעים. לכן אם נקבע צביעה חוקית של G ונצבע את s בצבע הנוסף אז זו צביעה חוקית של G' ב $k+1$ צבעים ולכן $G'\in (k+1)\text{-Col}$.
<u>$\Rightarrow$)</u> אם $G'\in (k+1)\text{-Col}$ אז בהכרח s צבוע בצבע השונה מיתר קודקודי הגרף (שכן הוא מחובר לכולם) ולכן יתר קודקודי הגרף צבועים ב k צבעים ומכאן ש G הוא k צביע כלומר $G\in k\text{-Col}$

מס' ת.ז.:___________________ מס' מחברת:__________

ב. (5 נקודות)
האם קיים קבוע חיובי C כך שלכל $k \geq C$ טבעי, k-Col היא שפה NP-שלמה?
(ניתן להשתמש בתוצאות סעיף א', גם אם לא הוכחתם סעיף זה.)

נראה ראשית כי לכל k הבעיה k-Col היא ב NP: עד: צביעת קודקודים ב- k צבעים. אלגוריתם: בדוק אם הצביעה חוקית כלומר עבור על כל הקשתות ובדוק שאין קשת מונוכרומטית (ששני קודקודיה צבועים באותו צבע).
<u>נכונות:</u> אם $G \in$ k-Col אז יש צביעה חוקית ב- k צבעים ולכן ניקח צביעה זו כעד והאלגוריתם יקבל.
אם $G \notin$ k-Col אז בכל צביעה ב k צבעים תהיה קשת מונוכרומטית ולכן האלגוריתם יכשל לכל עד.

נראה שלכל $k \geq 3$, k-Col היא NP קשה ולכן נקבל ש $\text{k-Col} \in \text{NPC}$. בתרגיל 6 הוכחנו ש 3-Col היא ב NPC. בסעיף הקודם ראינו ש $\text{k-Col} \leq_p \text{(k+1)-Col}$ ולכן ניתן להראות באינדוקציה שלכל $k \geq 3$ השפה היא ב NPC.

ג. (8 נקודות)
הוכיחו כי אם גרף לא מכוון $G=(V,E)$ הוא k-צביע אז יש בו קבוצת קודקודים בלתי תלויה (IS) בגודל $\left\lceil \frac{|V|}{k} \right\rceil$ (ערך שלם, מעוגל כלפי **מעלה**).

<u>**הוכחה:**</u>
נשים לב שבצביעה חוקית של גרף ב-k צבעים כל הקודקודים הצבועים בצבע מסוים, הם מהווים קבוצה בלתי תלויה בגרף (אחרת אם יש קשת בין שני קודקודים כאלו אז הקשת היא מונוכרומטית). לכן אם ניתן לצבוע גרף ב-k צבעים אז נקבע צביעה כלשהי ובהכרח יש צבע מסויים שצבענו בו לפחות $\left\lceil \frac{|V|}{k} \right\rceil$ מהקודקודים. או בניסוח אחר, אם מכל צבע יש פחות מ $\left\lceil \frac{|V|}{k} \right\rceil$ קודקודים אז יש בגרף פחות מ $k \cdot \left\lceil \frac{|V|}{k} \right\rceil < |V|$ קודקודים וסתירה.

מס' ת.ז.:____________________ מס' מחברת:__________

מס' ת.ז.:__________________ מס' מחברת:__________

<u>שאלה 2</u> (25 נקודות)

א. (13 נקודות)

נתונה השפה $L_1 = \{<M,G> \mid L(M)=L(G)$ - ו M מכונת טיורינג, G דקדוק חסר הקשר$\}$

האם השפה L_1 ב-R, ב-RE אך לא ב-R, ב-coRE אך לא ב-R, או שאינה ב- $coRE \cup RE$? הוכיחו!

<u>הוכחה:</u>

L_1 אינה ב RE ואינה ב- coRE. נראה זאת ע"י רדוקציה מ L_{Σ^*} (כלומר נראה $L_{\Sigma^*} \leq_m L_1$). בתרגול הוכחנו ששפה זו אינה ב $coRE \cup RE$ ולכן נקבל את הדרוש.

הרדוקציה: בהינתן M קלט ל L_{Σ^*} נבנה M,G (אותה ה- M) קלט ל L_1 באופן הבא: G הוא דקדוק ח"ה המייצר את L_{Σ^*} (אין צורך לבנות את הדקדוק).

ברור שהרדוקציה חשיבה.

<u>נכונות:</u> צ"ל $<M,G> \in L_1 \Leftrightarrow M \in L_{\Sigma^*}$.

<u>$\Rightarrow$)</u> אם $M \in L_{\Sigma^*}$ אז M מקבלת את L_{Σ^*} ולכן M ו- G מקבלים את אותה השפה, $<M,G> \in L_1$.

<u>$\Leftarrow$)</u> אם $M \notin L_{\Sigma^*}$ אז M לא מקבלת את L_{Σ^*} ולכן M ו- G לא מקבלים את אותה השפה.

ב. (12 נקודות)

נתונה השפה $L_2 = \{<M> \mid L(M) = \varnothing$ - מכונת טיורינג ו M $\}$

האם השפה L_2 ב-R, ב-RE אך לא ב-R, ב-coRE אך לא ב-R, או שאינה ב- $coRE \cup RE$? הוכיחו!

<u>הוכחה:</u>

$L_2 \in coRE \setminus R$.

כדי לראות ש $L_2 \in coRE$ נראה שיש מכונה שמקבלת את השפה המשלימה של L_2 (L_2^C).

בהינתן מכונה M נריץ את M בהרצה מבוקרת (שיטת האלכסון) על כל הקלטים ונקבל את M אם M קיבלה קלט כלשהו.

נכונות: אם $M \in L_2^C$ אז M מקבלת קלט כלשהו ולכן המכונה שבנינו תקבל את M. אם $M \notin L_2^C$ אז אין קלט ש M מקבלת ולכן המכונה שבנינו לא תעצור.

כעת נראה ש $L_2 \notin R$. נפעיל כאן את רייס. L_2 היא שפה של מכונות שאינה טריוויאלית (שכן למשל המכונה שדוחה כל קלט שייכת אליה ומכונה שמקבלת כל קלט לא שייכת אליה). כמו כן אם $L(M_1)=L(M_2)$ אז ברור שאו שהשפה ששתיהן מקבלות היא השפה הריקה או שאינה השפה הריקה ולכן $M_1 \in L_2 \Leftrightarrow M_2 \in L_2$. לכן ניתן להפעיל את רייס ולקבל את הדרוש.

מס' ת.ז.:________________ מס' מחברת:_________

חלק ב'

1. נאמר ששפה A הינה R-שלמה אם היא ב-R וכן ניתן לבצע רדוקצית מיפוי מכל שפה ב-R אליה. כלומר, שפה A הינה R-שלמה אם $A \in R$, ולכל $B \in R$ מתקיים ש- $B \leq_m A$.
   א. כל שפה ב-R הינה R-שלמה.
   ב. אין אף שפה ב-R שהינה R-שלמה.
   ג. יש אינסוף שפות ב-R שהן R-שלמות, וכן אינסוף שפות ב-R אינן R-שלמות.
   ד. יש מס' סופי של שפות ב-R שאינן R-שלמות, וכל שאר השפות ב-R הן R-שלמות.

   הסבר: רק השפה הריקה ו Σ^* אינן שלמות ב R.

2. נגדיר את השפה הבאה:
   Factoring = {<x,y> | x,y מס' טבעיים בייצוג בינארי, וקיים מס' טבעי 1<b<y המחלק את x}.
   אם $Factoring \in NPC$ אז:
   א. $P = NP$
   ב. $NP = coNP$
   ג. א' ו-ב' נכונות
   ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

   כאן (Factoring) לא ניתן להניח ש- $NP \neq coNP$ ו/או- $NP \neq P$

   ראינו בכיתה ש $Factoring \in NP \cap coNP$ ולכן אם $Factoring \in NPC$ אז יש בעיה ב NPC שהיא גם ב coNP ולפי תרגיל משיעורי בית הדבר יגרור ש $NP=coNP$.

3. תהי A_{NFA} = {<A,w> | A הינו NFA (אוטומט לא דטרמיניסטי) אשר מקבל את המילה w}
   א. $A_{NFA} \in RE \setminus R$
   ב. $A_{NFA} \in NP$ וכן אם $P \neq NP$ אז $A_{NFA} \in NP \setminus P$
   ג. $A_{NFA} \in P$
   ד. $A_{NFA} \in R \setminus NP$

   הסבר: ניתן להניח שאין מעברי אפסילון, אם יש נסיר אותם כפי שלמדנו בכיתה. האלגוריתם שלמדנו הוא פולינומיאלי במספר המצבים. נתחיל מהמצב ההתחלתי ונשאל לאלו מצבים ניתן להגיע עם התו הראשון מ w (יש לכל היותר |Q| מצבים כאלו). ממצבים אלו נבדוק לאן ניתן להגיע עם התו השני של w ונמשיך עד לתו האחרון. נשים לב שבכל שלב (מספר השלבים הוא כאורך הקלט) יש לעבור על לכל היותר $|Q|^2$ מצבים ולכן סה"כ פולינומיאלי ($O(|Q|^2|w|)$).

4. נגדיר מכונת טיורינג משופרת, TT, אשר יכולה להכיל "מידעון". ה-"מידעון" הינו מילה אינסופית בסרט נפרד, המיועד לקריאה בלבד. תוכן הסרט הנוסף הינו חלק מהמכונה (כלומר, עבור מכונה משופרת נתונה, הסרט הנוסף מכיל בדיוק את אותה המילה האינסופית לכל הקלטים של המכונה).
   האם קיימת מכונה מסוג TT היכולה להכריע את בעיית העצירה של מכונות טיורינג "רגילות"?
   כלומר, האם קיימת מכונה מסוג TT אשר מקבלת כקלט קידוד <M,w> של מכונת טיורינג רגילה M ומילה סופית w, ומכריעה האם M עוצרת על w?
   א. כן.
   ב. לא, אבל יש מכונה מסוג TT אשר תקבל את <M,w> כאשר M עוצרת על w, ולא תעצור כאשר M לא עוצרת על w.
   ג. לא, אבל יש מכונה מסוג TT אשר תקבל את <M,w> כאשר M לא עוצרת על w, ולא תעצור כאשר M עוצרת על w.
   ד. אם $P=NP$ אז יש מכונה מסוג TT כאמור, ואם $NP \neq P$ אז אין מכונת TT שכזו.

   הסבר: ה"מידעון" יהיה כל המילים השייכות לשפה.

5. נגדיר את השפה $MaxClique = \{<G,k> \mid$ G גרף לא מכוון עם קליק מכסימלי בגודל $k\}$
אם קיים פתרון פולינומיאלי דטרמיניסטי ל-MaxClique אז
   א. P=NP
   ב. coNP=NP
   ג. P=R
   ד. א' ו-ב' נכונות

כאן (MaxClique) לא ניתן להניח ש- NP≠coNP ו/או-NP≠P

6. עבור גרף לא מכוון G=(V,E), כאשר |V|=n ו-n מתחלק ב-3, נגדיר:
$Clique_{2/3} \wedge IS_{2/3}=\{<G> \mid$ יש ל-G קליק בגודל 2n/3 וגם IS בגודל 2n/3$\}$
$VC_{1/3} \vee IS_{2/3}=\{<G> \mid$ יש ב-G VC שגדלו לא יותר מ- n/3 או IS שגדלו לפחות 2n/3$\}$
$Clique_{1/3} \oplus IS_{1/3}=\{<G> \mid$ יש ל-G קליק בגודל n/3 או IS בגודל n/3 אבל לא את שניהם$\}$
תזכורת להגדרת קליק, IS ו-VC בגרפים:
קליק הינה קבוצת קודקודים, כך שיש קשת בין כל זוג קודקודים בקבוצה.
IS הינה קב' קודקודים בלתי-תלויה, כלומר אין קשת בין אף זוג קודקודים בקבוצה.
VC הינה קב' קודקודים S, כך שלכל קשת בגרף לפחות אחת מקודקודיה ב-S.
איזו מהטענות הבאות נכונה:
   א. שלושת השפות NP-שלמות.
   ב. שתיים מהשפות ב-P ואחת NP-קשה.
   ג. שפה אחת ב-P, אחת NP-שלמה ואחת NP-קשה שאינה NP שלמה.
   ד. אם כולן NP-שלמות אז NP=coNP אבל לא בהכרח P=NP.

הסבר: נשים לב שלא יתכן שיהיה בגרף גם קליק בגודל 2/3n וגם קבוצה בלתי תלויה בגודל 2/3n.

7. נגדיר את השפה הבאה:
$$SmallBig=\{v_1,\dots,v_n,w_1,\dots,w_n,V,W \mid \exists S\subseteq\{1,\dots,n\} \text{ s.t. } \sum_{i\in S} v_i \ge V \text{ and } \sum_{i\in S} w_i \le W\}$$
כאשר $v_1,\dots,v_n,w_1,\dots,w_n,V,W$ הינם מספרים טבעיים חיוביים הניתנים בייצוג בינארי.
בהנחה ש- P≠NP≠coNP, איזו מהטענות הבאות נכונה:
   א. $SubsetSum \le_p SmallBig$
   ב. SmallBig ב-P.
   ג. SmallBig הינה ב-RE\R.
   ד. SmallBig ב-coNP.

8. לכל מס' טבעי חיובי k, נגדיר את השפה L_k באופן הבא:
$L_k = \{ <M> \mid$ M מכונת טיורינג דטרמיניסטית המקבלת אינסוף מילים תוך k צעדים או פחות $\}$
איזו מהטענות הבאות נכונה:
   א. לכל k, L_k הינה ב-R אך לא ב-P.
   ב. לכל k, L_k הינה ב-P.
   ג. לפי משפט רייס, קיים k עבורו L_k לא נמצאת ב-R.
   ד. קיים k עבורו L_k לא נמצאת ב-R, אך זה לא נובע ממשפט רייס.

הסבר: תוך k צעדים ניתן לקרוא רק k תוים ולכן יש מילה w באורך k שמתקבלת תוך k צעדים אםם כל מילה שהרישא שלה הוא w תתקבל גם כן. יש לבדוק Σ^k מילים וזה פולינומיאלי באורך הקלט (k לא חלק מהקלט).

9. נגדיר את השפה $L = \{a^i b^j c^k \mid$ (אם i=1 אז j=k$\}$
איזו מהטענות הבאות נכונה:

מס' ת.ז.:___________________ מס' מחברת:__________

א. L רגולרית.

ב. L אינה רגולרית וניתן להראות זאת ע"י הפעלת למת הניפוח ישירות על L.

ג. L אינה רגולרית, אך לא ניתן להראות זאת ע"י הפעלת למת הניפוח ישירות על L.

ד. L אינה רגולרית ואינה חסרת הקשר. ניתן להוכיח זאת ע"י שימוש בלמת הניפוח לשפות חסרות הקשר ולמת הניפוח לשפות רגולריות.

הסבר: דומה לשאלה 5 בתרגיל 3.

10. תהי L שפה רגולרית, כך ש- $\sim_L$ משרה 2^n מחלקות שקילות על Σ^*, כאשר n הינו מס' טבעי חיובי. איזו מהטענות הבאות נכונה:

א. לכל שפה L שכזו קיים NFA עם לא יותר מ-n+1 מצבים המקבל את השפה המשלימה של L.

ב. לכל שפה L שכזו, כל NFA עם לכל היותר n+1 מצבים לא מקבל את השפה המשלימה של L.

ג. לכל שפה L שכזו קיים NFA עם לא יותר מ-n^2 מצבים המקבל את השפה המשלימה של L.

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.